Profesor Blaga Mirela-Gabriela

# Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

- determinarea intervalelor de convexitate şi de concavitate
- determinarea punctelor de inflexiune

1. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ și
   1. $f$ continuă pe $[a,b]$
   2. $f$ este de două ori derivabilă pe $(a,b)$
   atunci
   $a)$ $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow$ $f$ convexă pe $[a,b]$
   $b)$ $f''(x) \leq 0, \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow$ $f$ concavă pe $[a,b]$

Etape pentru determinarea intervalelor de convexitate şi de concavitate

Etapa I. Calculăm $f''$ pe domeniul de derivabilitate.
Etapa II. Rezolvăm ecuația $f''(x) = 0$ pe domeniul de derivabilitate.
Etapa III. Determinăm semnul funcției $f''$ pe intervalele pe care nu se anulează.
Utilizăm proprietatea funcțiilor continue de a păstra semn constant pe intervalele pe care nu se anulează.
Etapa IV. Stabilim intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției $f$.

2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f$ este derivabilă pe $I$ și $x_0 \in I$ (interior $I$) punct de continuitate. Dacă
   $a)$ $f$ este de două ori derivabilă într-o vecinătate $V$ a lui $x_0$
   $b)$ există punctele $a, b \in V$ astfel încât $x_0 \in (a,b)$
   $c)$ $f''(x_0) = 0$
   $d)$ $f''(x) < 0, \forall x \in (a, x_0), f''(x) > 0, \forall x \in (x_0, b)$ sau invers
   atunci $x_0$ este punct de inflexiune al funcției $f$.

*Probleme XI*

1. Fie funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3lnx$. Arătați că funcția $f$ este convexă pe $(0,\infty)$.
2. Considerăm funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Determinați intervalele de convexitate și de concavitate ale funcției $f$.
3. Se dă funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x - 2$.
Arătați că graficul funcției $f$ are un punct de inflexiune.
4. Studiați concavitatea și convexitatea funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|e^x$.
5. Arătați că funcția $f$ este concavă pe $(0,\infty)$, unde $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$.

*Probleme XII*

1. Considerăm funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$.
Arătați că orice primitivă a funcției $f$ este convexă pe intervalul $(0,\infty)$.
2. Arătați că funcția $f$ este concavă pe $[0,\infty)$, unde $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.