Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor

- determinarea intervalelor de monotonie
- determinarea punctelor de extrem
- demonstrarea unor inegalități
- studiul injectivității unei funcții

1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f derivabilă pe I

$a)$ f monoton crescătoare pe $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I$

$b)$ f monoton descrescătoare pe $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in I$

demonstrație $a)$

$" \Longrightarrow "$ f monoton crescătoare dacă $x > x_0 \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0), \forall x, x_0 \in I$

$$\Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Longrightarrow f'(x_0) \geq 0, \forall x_0 \in I$$

$" \Longleftarrow "$ din Teorema lui Lagrange avem $x_1 < x_2,\quad x_1, x_2 \in I$

$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \geq 0, c \in (x_1, x_2) \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

$\Longrightarrow$ f monoton crescătoare pe I

Observații:

1.Dacă f este derivabilă și $f'(x) > 0, \forall x \in I \Longrightarrow f$ strict crescătoare pe I.

2.Dacă f este strict crescătoare pe I nu rezultă în mod necesar că $f'(x) > 0$.

$ex. f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, dar $f'(x) = 5x^4 \geq 0$.

Etape pentru determinarea intervalelor de monotonie

Etapa I. Calculăm f' pe domeniul de derivabilitate.

Etapa II. Rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$ pe domeniul de derivabilitate.

Etapa III. Determinăm semnul funcției f' pe intervalele pe care nu se anulează.

Utilizăm proprietatea funcțiilor continue de a păstra semn constant pe intervalele pe care nu se anulează.

Etapa IV. Stabilim intervalele de monotonie ale funcției f.

2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f derivabilă pe I și $x_0 \in I$ (interior I) punct de continuitate

Dacă avem variație de semn a derivatei în jurul punctului $x_0 \in I$, atunci x_0 este punct de extrem (de minim sau de maxim).

Probleme XI

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Aflați coordonatele punctului de extrem al funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ln(x^2+x+1)$.

3. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - e^x$. Arătați că $f(x) \leq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. Se dă funcția $f: (-\infty, -1) \to (1, \infty)$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Verificați dacă funcția f este bijectivă.

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Arătați că $f\left(\sqrt[3]{2017}\right) \leq f\left(\sqrt[3]{2018}\right)$.

6. Demonstrați că f' este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot arctgx$.

7. Determinați parametrul real a știind că 3 este punct de extrem local al funcției $f: \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+x+a}{x^2-1}$.

8. Arătați că $f(x) \geq 7x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6x + e^x$.

9. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x - a$. Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x) = 0$ are trei soluții reale distincte.

Probleme XII

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$. Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Arătați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$.

3. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{3+sinx}$.
Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

4. Arătați că funcția f este descrescătoare pe $[1,\infty)$, unde $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$.