Profesor Blaga Mirela-Gabriela

# INELE ŞI CORPURI

**Definiţie** Se numește **inel** tripletul $(A,+,\cdot)$ , unde $|A|\geq 1$ , $+$ este operația de adunare și $\cdot$ este operația de înmulțire pentru care:
1)$(A,+)$ este grup comutativ,
2)$(A,\cdot)$ este monoid,
3) înmulțirea este distributivă față de adunare.
Dacă înmulțirea pe $A$ este comutativă, atunci avem **inel comutativ.**

**Definiţie** O submulțime nevidă $A'$ a unui inel $A$ se numește **subinel** al lui $A$ dacă legile de compoziție interne din $A$ induc legi de compoziție interne pe $A'$, a.î. $A'$ este inel.

**Teoremă** $(A',+,\cdot)$ este **subinel** a lui $(A,+,\cdot)$ dacă și numai dacă
1)$\forall x,y\in A' \quad \rightarrow \quad x-y\in A'$,
2)$\forall x,y\in A' \quad \rightarrow \quad xy\in A'$ , $1\in A'$.

**Definiţie** Într-un inel $(A,+,\cdot)$ cu element unitate, $(U(A),\cdot)$ reprezintă grupul elementelor inversabile sau grupul unităților din inelul $A$.

**Definiţie** Fie inelul $(A,+,\cdot)$. Un element $x\neq 0$ din $A$ se numește divizor la stânga (dreapta) al lui zero dacă există $y\neq 0$ din $A$ a.î. $xy=0$ $(yx=0)$.

**Definiţie** Inelul $(A,+,\cdot)$ are divizori ai lui zero dacă $A$ conține cel puțin un divizor al lui zero. Un inel comutativ nenul care nu are divizori ai lui zero se numește **inel integru** sau **domeniu de integritate.**

**Exemple de inele**
1)$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ inelul comutativ al numerelor întregi
$(n\mathbb{Z},+,\cdot)$ subinel comutativ al lui $\mathbb{Z}$
$U(\mathbb{Z})=\{-1,1\}$
2)$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ inelul comutativ al numerelor raționale
$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ subinel comutativ al lui $\mathbb{Q}$
$U(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}^*$
3)$(\mathbb{R},+,\cdot)$ inelul comutativ al numerelor reale
$(\mathbb{Z},+,\cdot),(\mathbb{Q},+,\cdot)$ subinele comutative al lui $\mathbb{R}$
$U(\mathbb{R})=\mathbb{R}^*$
4)$(\mathbb{C},+,\cdot)$ inelul comutativ al numerelor complexe
$(\mathbb{Z},+,\cdot),(\mathbb{Q},+,\cdot),(\mathbb{R},+,\cdot)$ subinel comutativ al lui $\mathbb{C}$
$U(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$
5)$(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),+,\cdot)$ inelul matricelor pătratice de ordinul $n$ cu elemente din $\mathbb{C}$
$U(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))=GL(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})|detA\neq 0\}$
6)$(\mathcal{F}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ inelul funcțiilor reale, $\mathcal{F}(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\}$
7)$(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ inelul claselor de resturi modulo $n$
8)$(\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$ inelul întregilor lui Gauss

**Definiţie** Se numește **corp** tripletul $(K,+,\cdot)$ , unde $|K|\geq 2$ , $+$ este operația de adunare și $\cdot$ este operația de înmulțire pentru care:
1)$(K,+)$ este grup comutativ, cu elementul neutru 0,
2)$(K-\{0\},\cdot)$ este grup, cu elementul neutru 1,
3) înmulțirea este distributivă față de adunare.
Dacă înmulțirea pe $A$ este comutativă, atunci avem **corp comutativ**.

Exemple de corpuri $(\mathbb{Q},+,\cdot),(\mathbb{R},+,\cdot),(\mathbb{C},+,\cdot),(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ $p$ număr prim
$(\mathbb{Q}[\sqrt{d}],+,\cdot)$ $d\in\mathbb{Z}-\{1\}$ liber de pătrate

Definiție O submulțime nevidă $K'$ a unui corp $K$ se numește **subcorp** al lui $K$ dacă legile de compoziție interne din $K$ induc legi de compoziție interne pe $K'$, a.î. $K'$ este corp.

Teoremă $(K',+,\cdot)$ este **subcorp** a lui $(K,+,\cdot)$ dacă și numai dacă
1) $\forall x,y\in K' \quad\rightarrow\quad x-y\in K'$,
2) $\forall x,y\in K'\ x,y\neq 0 \quad\rightarrow\quad xy^{-1}\in K'$.

## Aplicații

1. Fie $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\,\middle|\, a\in\mathbb{Q}, b\in\mathbb{R}\right\}$. Arătați că $(A,+,\cdot)$ este inel comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.
2. Fie $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 2b & a\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z}\right\}$. Arătați că $A$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.
3. Fie $M=\{A(x,y)=xI_2+yA\ |x,y\in\mathbb{R}\}$, unde $A=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Arătați că $(M,+,\cdot)$ este inel în raport cu operațiile de adunare si înmulțire a matricelor.
4. Arătați că mulțimea $A=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$ împreună cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor formează o structură de inel comutativ.
5. Fie $A=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}|\ f \text{ continuă}\}$. Arătați că mulțimea $A$ împreună cu adunarea și înmulțirea funcțiilor formează inel comutativ.
6. Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție $x*y=x+y+2, x\circ y=xy+2x+2y+2$.
   $a)$Arătați că $(\mathbb{Z},*,\circ)$ este domeniu de integritate.
   $b)$Determinați elementele inversabile din $(\mathbb{Z},*,\circ)$.
7. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$.
   $a)$Aflați elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}_6$.
   $b)$Rezolvați în $\mathbb{Z}_6$ ecuația $x^2=x$.
   $c)$Calculați probabilitatea ca alegând un element din $\mathbb{Z}_6$ acesta să fie soluție a ecuației $x^3=\hat{0}$.
8. Fie inelul $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$.
   $a)$Calculați suma elementelor inelului $\mathbb{Z}_8$.
   $b)$Calculați produsul elementelor inversabile ale inelului $\mathbb{Z}_8$.
   $c)$Rezolvați în $\mathbb{Z}_8$ sistemul $\begin{cases}\hat{2}x+\hat{5}y=\hat{2}\\ \hat{3}x+\hat{2}y=\hat{5}\end{cases}$.
9. Fie legile de compoziție $x*y=x+y+2, x\circ y=xy+2x+2y+2, x,y\in\mathbb{Q}$. Arătați că $(\mathbb{Q},*,\circ)$ este corp comutativ.
10. Arătați că mulțimea $K$ împreună cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor formează corp, unde $K=\left\{\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{1}\\ \hat{1} & \hat{0}\end{pmatrix}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$.
11. $a)$Arătați că $a+a+a+a+a=\hat{0},\forall a\in\mathbb{Z}_5$.
    $b)$Demonstrați că $(a+b)^5=a^5+b^5,\forall a,b\in\mathbb{Z}_5$.