

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Matematică
Varianta 27

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numerele $1, \log_4 16, \sqrt[3]{64}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p 2. Se dau funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x$ și $g(x) = 2x - 3$. Calculați $(f \circ g)(2)$.
- 5p 3. Determinați soluțiile reale ale ecuației $\log_2(x + 2) + \log_2 x = 3$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr dintre C_4^2, C_5^2, A_4^3 , acesta să fie divizibil cu 3.
- 5p 5. Fie vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + m\vec{j}, m \in \mathbb{R}$. Determinați m pentru care vectorii $\vec{u} + \vec{v}$ și $\vec{u} - \vec{v}$ sunt perpendiculari.
- 5p 6. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC . Determinați măsura unghiului A , știind că $BC = 6$ și raza cercului circumscris triunghiului este egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Fie matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Arătați că $\det(A(a)) = (a - 1)(a + 1)$.
- 5p b) Rezolvați ecuația $A(2)X = A(1), X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p c) Calculați $\det(I_2 - A(0) + A(1) - A(2) + \dots - A(20))$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă $x * y = xy + 3x + 3y + 6$.
- 5p a) Calculați $\log_{117}(1 * 2 * 3)$.
- 5p b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $x * x * x = x$.
- 5p c) Determinați $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $a * x = x * a = a, \forall x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{10} + 10^x$.
- 5p a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă zero.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - 1}{x^2}$.
2. Se consideră funcția $f_n: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n \ln x, n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Calculați $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{f_1(x)} dx$.
- 5p b) Determinați punctele de inflexiune ale primitivelor funcției f_2 .
- 5p c) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f_0(x)$ în jurul axei Ox .

(10 puncte)