Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Matematică
Varianta 29

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1.Calculați rația progresiei geometrice strict crescătoare a cărei termeni verifică condițiile $a_4 - a_1 = 7, a_3 - a_2 = 2$.

5p 2.Determinați valorile parametrului real m pentru care graficele funcțiilor $f, \mathrm{g}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$, $\mathrm{g}(x) = 2x^2 - x + 1$ se intersectează într-un singur punct.

5p 3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{2x+1}$.

5p 4.Calculați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele $\{0,1,2,3\}$.

5p 5.Fie $ABCD$ paralelogram, iar P un punct cu proprietatea $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PD}$. Arătați că $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

5p 6.Arătați că expresia $\sin(x+y)\sin(x-y) + \cos^2 x + \sin^2 y$ nu depinde de x și y reali.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Fie sistemul $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 3y + az = 1 \\ x + 9y + a^2 z = 1 \end{cases}$, $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 9 & a^2 \end{pmatrix}$ este matricea sistemului, $a \in \mathbb{R}$.

5p $a)$Calculați $\det(A(2))$.

5p $b)$Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului este inversabilă.

5p $c)$Pentru $a = 1$, determinați soluția sistemului care verifică relația $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

2.Fie polinoamele $f = X^3 + aX^2 + X + \hat{1}$ și $\mathrm{g} = X + \hat{3}$ cu coeficienți în $\mathbb{Z}_5$.

5p $a)$Determinați $a \in \mathbb{Z}_5$ pentru care f este divizibil cu g.

5p $b)$Pentru $a = \hat{1}$, arătați că $f = (X + \hat{1})(X^2 + \hat{1})$.

5p $c)$Rezolvați ecuația $f(x) = \hat{0}$, în cazul $a = \hat{1}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$.

5p $a)$Calculați $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + 3}{x}$.

5p $b)$Demonstrați că funcția f are două puncte de extrem.

5p $c)$Arătați că $f(x) > -6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2.Fie funcția $f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

5p $a)$Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare.

5p $b)$Aflați aria suprafeței plane determinate de funcția $\mathrm{g}: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{g}(x) = f(x)$ și axa Ox.

5p $c)$Calculați $\lim_{n \to \infty} n\left(2 - \int_n^{n+1} f(x)dx\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(10 puncte)