

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Aflați partea imaginară a numărului complex $z = \frac{1}{1-i} - \frac{1}{2+i}$.
- 5p 2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2 - 7x + 12 \leq 0$.
- 5p 3. Arătați că funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + \log_a x$, $a \in (1, \infty)$ este monotonă.
- 5p 4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{0,1,2,3\} \rightarrow \{0,1,2,3\}$ cu proprietatea $f(0) = f(1)$.
- 5p 5. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC , dacă $AB = 4$, $BC = 6$, $CA = 2\sqrt{5}$.
- 5p 6. Fie expresia $E(x) = \cos \frac{x}{2^0} + \cos \frac{x}{2^1} + \cos \frac{x}{2^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Calculați $E(\pi)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
- 5p a) Calculați AA^t , unde A^t este transpusa matricei A .
- 5p b) Arătați că $\det(A^t A) = 0$.
- 5p c) Aflați inversa matricei $I_2 - AA^t$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = \sqrt{2^x + 2^y}$.
- 5p a) Calculați $2 \circ 2$.
- 5p b) Arătați că $x \circ (-x) \geq \sqrt{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Rezolvați ecuația $\log_2(x \circ 2x) = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Fie funcția $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln x + 1)$.
- 5p a) Aflați derivata funcției f .
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(3x)}{f(x)}$.
- 5p c) Arătați că f' este o funcție strict descrescătoare.
2. Fie $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1+x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5p a) Calculați I_1 .
- 5p b) Arătați că $I_n \geq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 5p c) Demonstrați egalitatea $5I_3 = 2\sqrt{2} - 2I_1$.

(10 puncte)