Profesor Blaga Mirela-Gabriela

MATEMATICĂ

M_mate-info

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1.Aflați suma primilor 15 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, știind că al optulea termen este egal cu 16.

5p 2.Ordonați crescător $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3})$ și $f(2)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6x-3x^2$.

5p 3.Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{1-2x}=3$.

5p 4.Determinați numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea $f(0)=1$.

5p 5.Fie triunghiul ABC și $M\in(BC)$ astfel încât $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

5p 6.Arătați că numărul $\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right)^{100}$ este real.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.Considerăm mulțimea $G=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & lna\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, a\in(0,\infty)\right\}$.

5p $a)$Arătați că I_3 aparține lui G.

5p $b)$Verificați dacă $A(a)A(b)=A(ab), \forall A(a),A(b)\in G$.

5p $c)$Determinați inversa matricei $A(a)\in G$.

2.Fie $(G,\cdot)$ grup și pentru fiecare element $a\in G$ se definește funcția $f_a:G\to G$, $f_a(x)=ax, \forall x\in G$, iar „$\circ$” reprezintă operația de compunere a funcțiilor.

5p $a)$Arătați că f_a este bijectivă, $\forall a\in G$.

5p $b)$Arătați că $f_a\circ f_b=f_{ab}$, $\forall a,b\in G$.

5p $c)$Arătați că mulțimea $H=\{f_a:G\to G|a\in G\}$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează grup.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-ln(e^x+1)$.

5p $a)$Arătați că funcția f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p $b)$Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5p $c)$Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

2.Fie funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p $a)$Arătați că $\int_1^e f_1\left(\sqrt{x-1}\right)dx=1$.

5p $b)$Calculați $\int_0^1 xf_n(x)dx$, $\forall n\geq 2$.

5p $c)$Determinați primitiva G a funcției $\mathrm{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathrm{g}(x)=xf_2(x)$ care verifică relația $G(1)=0$.

(10 puncte)

BAREM DE EVALUARE		
∗ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător. ∗ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se calculează prin împărțirea punctajului total obținut la 10.		
	SUBIECTUL I	
1.	$a_8 = 16$ și $S_{15} = \dfrac{15(a_1 + a_{15})}{2}$ $S_{15} = 15(a_1 + 7r) = 15 \cdot a_8 = 15 \cdot 16 = 240$	2p 3p
2.	$a = -3 < 0$, f descrescătoare pentru $x \geq 1$ $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$ și f descrescătoare avem $f(2) < f(\sqrt{3}) < f(\sqrt{2})$	3p 2p
3.	$1 - 2x = 9$, $x = -4$ Verificarea soluției.	3p 2p
4.	$f(0) = 1, f(1), f(2), f(3) \in \{0,1,2\}$ Numărul funcțiilor este $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \dfrac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$ și $k = \dfrac{1}{2}$ $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$	3p 2p
6.	$\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{100} = \cos\dfrac{100\pi}{4} + i\sin\dfrac{100\pi}{4} =$ $= \cos 25\pi + i \sin 25\pi = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \in \mathbb{R}$	2p 3p
	SUBIECTUL al II-lea	
1.a)	$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_3 = A(1) \in G$, $1 \in (0, \infty)$	2p 3p
b)	Efectuarea calculului $A(a)A(b)$, demonstrarea egalității $A(a)A(b) = A(ab), \forall a, b \in (0, \infty)$.	3p 2p
c)	$\det(A(a)) = a \neq 0$ atunci există $A^{-1}(a)$, Din punctele $a), b)$ avem $A(a)A^{-1}(a) = A(1)$ și $A(a)A(b) = A(ab), \forall a, b \in (0, \infty)$, $A^{-1}(a) = A\left(\dfrac{1}{a}\right) \in G$, $\dfrac{1}{a} \in (0, \infty)$.	1p 2p 2p
2.a)	O funcție injectivă și surjectivă este bijectivă. f_a este bijectivă prin construcție, $\forall a \in G$.	2p 3p
b)	$f_a \circ f_b : G \to G$, $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) =$ $= f_{ab}(x), \forall a, b \in G$.	2p 3p
c)	Din $a)$ mulțimea H este bine definită și din $b)$ „∘” are sens pe H, „∘” funcțiilor este asociativă, elementul neutru este $f_1 \in H$, unde $1 \in G$ element neutru, elementele simetrizabile sunt $f_{a^{-1}} \in H$, atunci $(H, \circ)$ grup.	2p 2p 1p
	SUBIECTUL al III-lea	
1.a)	$f'(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$ $f''(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$ f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 2p 1p
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(x - \ln(e^x + 1)) = \lim\limits_{x\to\infty}(\ln e^x - \ln(e^x + 1)) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty} \ln\dfrac{e^x}{e^x + 1} = 0$	2p 3p
c)	Din $b)$ $y = 0$ este ecuația asimptotei spre $+\infty$, $y = x$ este ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.	2p 3p
2. a)	$f_1(\sqrt{x-1}) = \dfrac{1}{x}$	2p

	$\int_1^e f_1(\sqrt{x-1})dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = lnx\Big\|_1^e = 1$	3p
$b)$	$\int_0^1 xf_n(x)dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^n dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t^n}dt =$ $= \frac{2^{1-n}-1}{2(1-n)}, n \geq 2$	3p 2p
$c)$	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = xf_2(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, g admite primitive, $G(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + c$ și $G(1) = 0$ avem $G(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{4}$	2p 2p 1p