Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Cercul

Definiție

Cercul este locul geometric al punctelor din plan, egal depărtate de un punct fix, numit centru.

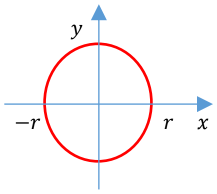
$\mathcal{C}(O,r) = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ OM = r\ , r \in \mathbb{R}_+^*\}$ cercul de centru O și rază r

Ecuația cercului de centru $O(0,0)$ și rază r $\mathcal{C}(O,r)$

Demonstrație

$OM = r \ \leftrightarrow\ OM^2 = r^2 \ \leftrightarrow$

$\mathcal{C}: x^2 + y^2 = r^2$



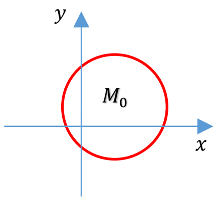
$\mathcal{C}(M_0,r) = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ M_0M = r\ , r \in \mathbb{R}_+^*\}$ cercul de centru M_0 și rază r

Ecuația canonică sau Ecuația carteziană implicită a cercului $\mathcal{C}(M_0,r)$

Demonstrație

$M_0M = r \ \leftrightarrow\ M_0M^2 = r^2 \ \leftrightarrow$

$\mathcal{C}: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$



Ecuațiile parametrice ale cercului

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = x_0 + r \cdot cost \\ y = y_0 + r \cdot sint \end{cases}, r \in \mathbb{R}_+^*, t \in [0,2\pi)$$

Ecuația carteziană generală a cercului $\mathcal{C}(M_0,r)$

$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

De aici, obținem ecuația canonică a cercului, astfel:

$\mathcal{C}: x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2 + c - a^2 - b^2 = 0$

$\mathcal{C}: (x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c$

$I.\ a^2 + b^2 - c > 0 \ \rightarrow$ cercul $\mathcal{C}(M_0,r), M_0(-a,-b), r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

$II.\ a^2 + b^2 - c = 0 \ \rightarrow$ punctul $M_0(-a,-b)$

$III.\ a^2 + b^2 - c < 0 \ \rightarrow$ cerc imaginar

Tangenta la cerc

Tangenta la cerc în punctul $M_1(x_1,y_1) \in \mathcal{C}(M_0,r)$ se obține prin dedublarea ecuației cercului.

Obținem ecuația tangentei:

$t: (x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2$ sau

$t: x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + a(x + x_1) + b(y + y_1) + c = 0$

Normala la cerc

Normala este perpendiculara în punctul $M_1(x_1, y_1) \in \mathcal{C}(M_0, r)$ pe tangenta în $M_1(x_1, y_1)$ la cerc.

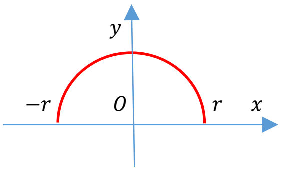
Ecuația normalei este $n: y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1)$.

Observație

Funcția $f: [-r, r] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ reprezintă de fapt un semicerc, pentru că provine din cercul de ecuație $x^2 + y^2 = r^2$.

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \;\to\; y = \sqrt{r^2 - x^2} \;\to\; y^2 = r^2 - x^2 \;\to\; x^2 + y^2 = r^2$

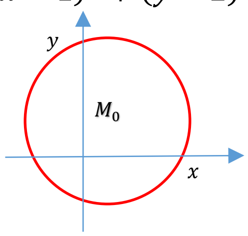
Deoarece $\sqrt{r^2 - x^2} \geq 0$ reprezentarea grafică a funcției f este:



Aplicația 1. Scrieți ecuația cercului de centru $M(1,2)$ și rază 4.

$\mathcal{C}: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

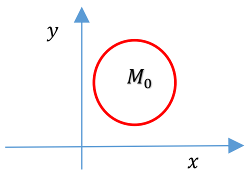
$\mathcal{C}: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$



Aplicația 2. Scrieți ecuația cercului de diametru AB, unde $A(1,2), B(3,4)$.

Raza este $r = \dfrac{AB}{2}$, $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, iar centrul cercului este mijlocul segmentului AB, punctul $M_0\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ și prin înlocuire $M_0(2,3)$.

$\mathcal{C}: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \sqrt{2}^2$



Aplicația 3. Scrieți ecuația cercului circumscris triunghiului ABC, unde $A(-2,3), B(4,3)$ și $C(-2,-1)$.

Ecuația dreptei AB este $y = 3$ și ecuația dreptei AC este $x = -2$, de unde $AB \perp AC \rightarrow \Delta ABC$ dreptunghic în A, iar centrul cercului circumscris Δ este mijlocul segmentului BC, adică $M(1,1)$ și raza este $r = \dfrac{BC}{2} \rightarrow r = \sqrt{13}$.

$\mathcal{C}: (x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{13}^2$

Aplicația 4. Aflați ecuația tangentei în punctul $A(1+\sqrt{3}, 2)$ la cercul $\mathcal{C}(M_0(1,1),2)$.

Ecuația cercului este:

$\mathcal{C}: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

Punctul $A\left(1+\sqrt{3}, 2\right)$ aparține cercului $\mathcal{C}$, iar ecuația tangentei devine:

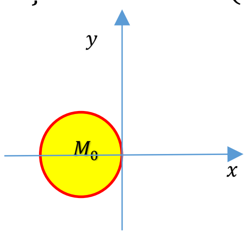
$t: (x-1)\left(1+\sqrt{3}-1\right) + (y-1)(2-1) = 2^2$

$t: \sqrt{3}x + y - 5 - \sqrt{3} = 0$

Aplicația 5. Aflați valoarea maximă a expresiei $E(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 6y$, $(x,y) \in D$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; x^2 + y^2 + 2x \leq 0\}$.

$x^2 + y^2 + 2x = (x+1)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \;\rightarrow\; (x+1)^2 + y^2 \leq 1$

Obținem discul $D(M_0(-1,0), r)$, $0 \leq r \leq 1$.



Ecuațiile parametrice sunt:

$D: \begin{cases} x = -1 + r \cdot cost \\ y = r \cdot sint \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi)$.

$E(r,t) = (-1 + r \cdot cost)^2 + (r \cdot sint)^2 - 6(-1 + r \cdot cost) - 6 \cdot r \cdot sint =$

$= r^2 cos^2 t + r^2 sin^2 t - 8rcost - 6rsint + 7 =$

$= r^2 + 7 - r(8cost + 6sint) \leq 1 + 7 - \sqrt{8^2 + 6^2}\sqrt{cos^2 t + sin^2 t} = -2$

Maximul lui $E(x,y)$ este -2.

Problema 1. Determinați centrul și raza cercului circumscris triunghiului determinat de punctele $A(-1,5), B(-2,-2), C(5,5)$.

Problema 2. Aflați ecuația tangentei în punctul $A(-3,0)$ la cercul $\mathcal{C}(O(0,0),3)$.

Problema 3. Arătați că ecuația $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ reprezintă un cerc.