Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Continuitatea funcțiilor

1. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, x\le 1\\ 2x-1, \quad x>1\end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.
2. Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+ax, x\ge 2\\ 2x-1, x<2\end{cases}$ să fie continuă în punctul 2.
3. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, x\le 1\\ \dfrac{x^3+x+1}{x}, x>1\end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.
4. Studiați continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sin(x-1)}, x>1\\ \dfrac{1}{3}, \quad x\le 1\end{cases}$ în punctul 1.
5. Studiați continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x^3-1}, & x<1\\ \dfrac{1}{3}, & x=1\\ \dfrac{x-1}{\operatorname{tg}(x-1)}, & x>1\end{cases}$.
6. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+4ax, \quad x\ge -1\\ 2x+3-4a, x<-1\end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.
7. Studiați continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|2x+1|-|2-x|$.
8. Determinați punctele de discontinuitate de speța întâi ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x+1}, & x<1\\ \dfrac{1}{3}, & 1\le x\le 3\\ \dfrac{x-1}{\log_2(x-1)}, & x>3\end{cases}.$$
9. Arătați că ecuația $x^3-3x+1=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(0,1)$.
10. Aflați valorile lui $a\in\mathbb{R}$, pentru care ecuația $x^2=2^x+a$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,0)$.

1. f este continuă pe intervale și $f_s(1) = f(1) = f_d(1) \ \rightarrow \ f$ este continuă pe $\mathbb{R}$
2. $f_s(1) = f(1) = f_d(1) \ \rightarrow \ x = -\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$
3. f este continuă pe intervale și $f_s(1) = f(1) = f_d(1) \ \rightarrow \ f$ este continuă pe $\mathbb{R}$
4. $f_s(1) = f(1) \neq f_d(1) \ \rightarrow \ f$ nu este continuă în 1
5. f este continuă pe intervale și $f_s(1) = f(1) \neq f_d(1) \ \rightarrow \ f$ nu este continuă în 1
6. f este continuă pe intervale și $f_s(-1) = f(-1) = f_d(-1) \ \rightarrow$

   f este continuă pe $\mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$
7. f este continuă pe $\mathbb{R}$
8. $f_s(1) \neq f(1) = f_d(1) \ \rightarrow \ x = 1$ este punct de discontinuitate de prima speță

   $f_s(3) = f(3) \neq f_d(3) \ \rightarrow \ x = 3$ este punct de discontinuitate de prima speță
9. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$. f continuă pe $\mathbb{R}$.

   $f(0) = 1$ și $f(1) = -1 \ \rightarrow \ f(0) \cdot f(1) < 0 \quad \overbrace{- - - \rightarrow}^{cf.\ Lemei\ Bolzano-Cauchy}$

   f are cel puțin o soluție în intervalul $(0,1)$.
10. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2^x - a$. f continuă pe $\mathbb{R}$.

    f are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,0)$, dacă $f(-1) \cdot f(0) < 0$.