Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Elipsa

Definiție

Elipsa este locul geometric al punctelor pentru care suma distanțelor la două puncte fixe, numite focarele elipsei, este constantă.

$E = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid MF' + MF = 2a \,, a \in \mathbb{R}_+^*\}$

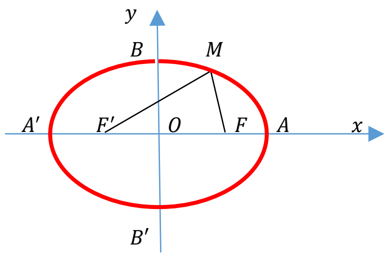
Ecuația canonică a elipsei

$$E = \left\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,, b^2 = a^2 - c^2, a, b, c \in \mathbb{R}_+^*\right\}$$

Focarele elipsei sunt două puncte fixe de coordonate $F(c,0)$ și $F'(-c,0)$.

$FF' = 2c > 0$

$E: MF' + MF = 2a \,, a > c$



Originea reperului cartezian $O(0,0)$ este centrul de simetrie al elipsei.

Ox, Oy sunt axe de simetrie.

a este semiaxa mare a elipsei și b este semiaxa mică.

Vârfurile elipsei sunt punctele $A(a,0), A'(-a,0), B(0,b), B'(0,-b)$.

Ecuațiile parametrice ale elipsei

$$E: \begin{cases} x = a \cdot cost \\ y = b \cdot sint \end{cases}, t \in [0,2\pi)$$

Ecuații carteziene explicite

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad , x \in [-a,a]$$

Tangenta la elipsă

Tangenta la elipsă în punctul $M_0(x_0, y_0) \in E$ se obține prin dedublarea ecuației elipsei.

Obținem ecuația tangentei:

$$t: \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Aplicația 1. Scrieți vârfurile și focarele elipsei $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \rightarrow A(3,0), A'(-3,0)$

$b^2 = 4 \rightarrow b = 2 \rightarrow B(0,2), B'(0,-2)$

$b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow c^2 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5} \rightarrow F(\sqrt{5}, 0), F'(-\sqrt{5}, 0)$

Aplicația 2. Desenați elipsa de ecuație $E: 3x^2 + 2y^2 = 12$.

$E: 3x^2 + 2y^2 = 12 \;|: 12$

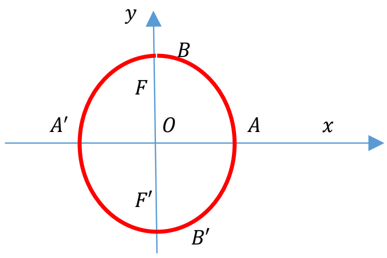
$E: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{6} = 1$

$a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow A(2,0), A'(-2,0)$

$b^2 = 6 \rightarrow b = \sqrt{6} \rightarrow B(0,\sqrt{6}), B'(0,-\sqrt{6})$

$b^2 > a^2 \rightarrow$ focarele sunt situate pe axa Oy

$a^2 = b^2 - c^2 \rightarrow c^2 = 2 \rightarrow c = \sqrt{2} \rightarrow F(0,\sqrt{2}), F'(0,-\sqrt{2})$



Aplicația 3. Scrieți ecuația tangentei în punctul $A\left(2, \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ la elipsa $E: \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

$A\left(2, \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right) \in E$

Obținem ecuația tangentei:

$t: \dfrac{2x}{9} + \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\dfrac{y}{4} = 1 \rightarrow t: 4x + 3\sqrt{5}y - 18 = 0$

Problema 1. Determinați ecuația elipsei care trece prin punctul $A(1,1)$ și $\dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$.

Problema 2. Scrieți ecuația tangentei în punctul $A(1,1)$ la elipsa $E: 25x^2 + 9y^2 = 34$.

Problema 3. Scrieți ecuația elipsei determinate de punctele $A\left(-2, \dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)$ și $B\left(\sqrt{5}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.