Profesor Blaga Mirela-Gabriela

# Probleme de loc geometric

1. Să se afle locul geometric al punctelor $M$, știind că vârfurile $A, B$ ale triunghiului $ABM$ sunt fixe, $M$ este un punct variabil, iar mediana $AA'$ dusă din $A$ are o lungime fixă.

Aplicăm Teorema medianei în triunghiul $ABM$, pentru mediana dusă din $A$ avem:

$$A'A^2 = \frac{2(AB^2 + AM^2) - BM^2}{4} \rightarrow \frac{AM^2}{2} - \frac{BM^2}{4} = A'A^2 - \frac{AB^2}{2} \rightarrow \frac{AM^2}{2} - \frac{BM^2}{4} = k^2$$

$\rightarrow \alpha AM^2 + \beta BM^2 = k^2 \rightarrow$ locul geometric al punctelor $M$ este un cerc, $k =$ constant, unde $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$ .

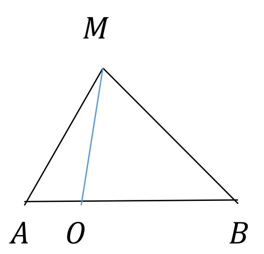
*Analitic*

$$\left(x_M - (2x_A - x_B)\right)^2 + \left(y_M - (2y_A - y_B)\right)^2 = 4 \cdot A'A^2 = r^2$$

Locul geometric al punctelor $M$ este cercul de centru $C(2x_A - x_B, 2y_A - y_B)$ și rază $r$.

2. Să se afle locul geometric al punctelor $M$, astfel ca între distanțele $MA, MB$ la două puncte fixe $A, B$ să avem relația $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k^2 =$ constant , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+{}^*$ .

Fie $O \in (AB), \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{\beta}{\alpha}$ $(*)$.




Utilizând Teorema lui Stewart avem:

$$MA^2 \cdot OB + MB^2 \cdot OA - MO^2 \cdot AB = OA \cdot OB \cdot AB$$

Din $(*)$ deducem $OA = \dfrac{\beta \cdot AB}{\alpha + \beta}$ și $OB = \dfrac{\alpha \cdot AB}{\alpha + \beta}$ .

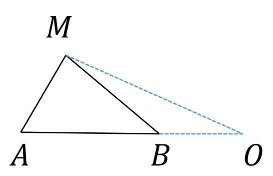
$$MA^2 \cdot \frac{\alpha \cdot AB}{\alpha + \beta} + MB^2 \cdot \frac{\beta \cdot AB}{\alpha + \beta} - MO^2 \cdot AB = \frac{\beta \cdot AB}{\alpha + \beta} \cdot \frac{\alpha \cdot AB}{\alpha + \beta} \cdot AB \;\Big|: \frac{AB}{\alpha + \beta} \rightarrow$$

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 = (\alpha + \beta) MO^2 + \frac{\alpha\beta \cdot AB^2}{\alpha + \beta} = k^2 = \text{constant, din datele problemei} \rightarrow$$

$MO =$ constant $\rightarrow$ locul geometric al punctelor $M$ este un cerc de centru $O$

3. Să se afle locul geometric al punctelor $M$, astfel ca între distanțele $MA, MB$ la două puncte fixe $A, B$ să avem relația $\alpha MA^2 - \beta MB^2 = k^2 =$ constant , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+{}^*$ .

Fie $O \in (AB, \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{\beta}{\alpha}$ .



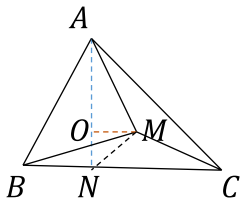

Utilizând Teorema lui Stewart avem:

$$MA^2 \cdot OB - MB^2 \cdot OA - MO^2 \cdot AB = OA \cdot OB \cdot AB$$

$\alpha MA^2 - \beta MB^2 = (\alpha+\beta)MO^2 + \dfrac{\alpha\beta \cdot AB^2}{\alpha+\beta} = k^2 =$ constant, din datele problemei $\rightarrow$

$MO =$ constant $\rightarrow$ locul geometric al punctelor $M$ este un cerc de centru $O$

4. Fie punctele fixe $A, B, C$. Să se afle locul geometric al punctelor $M$, astfel încât $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k^2 =$ constant .




Considerăm $AN \perp BC$ , $N \in (BC)$ și $\dfrac{BN}{NC} = \dfrac{\gamma}{\beta}$ , respectiv $\dfrac{AO}{ON} = \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}$ .

Utilizând Teorema lui Stewart în $\Delta MBC$ avem:

$MB^2 \cdot NC + MC^2 \cdot BN - MN^2 \cdot BC = NC \cdot BN \cdot BC \quad \rightarrow$

$$\beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\beta+\gamma)MN^2 + \frac{\beta\gamma \cdot BC^2}{\beta+\gamma} \quad (1)$$

Utilizând Teorema lui Stewart în $\Delta MAN$ avem:

$MA^2 \cdot ON + MN^2 \cdot AO - MO^2 \cdot AN = ON \cdot AO \cdot AN \quad \rightarrow$

$$\alpha MA^2 + (\beta+\gamma)MN^2 = (\alpha+\beta+\gamma)MO^2 + \frac{\alpha(\beta+\gamma) \cdot AN^2}{\alpha+\beta+\gamma} \quad (2)$$

Din (1) și (2) avem:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha+\beta+\gamma)MO^2 + \frac{\alpha(\beta+\gamma) \cdot AN^2}{\alpha+\beta+\gamma} + \frac{\beta\gamma \cdot BC^2}{\beta+\gamma} = k^2 \quad \rightarrow$$

$MO =$ constant $\rightarrow$ locul geometric al punctelor $M$ este un cerc de centru $O$

5. Generalizare. Fie $A_1, A_2, \dots, A_n$ puncte fixe și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, k \in \mathbb{R}$ date.
Să se afle locul geometric al punctelor $M$, pentru care
$\alpha_1 MA_1{}^2 + \alpha_2 MA_2{}^2 + \dots + \alpha_n MA_n{}^2 = k^2 =$ constant .

Fie punctele $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n), M(x, y)$.

$\alpha_1 MA_1{}^2 + \alpha_2 MA_2{}^2 + \dots + \alpha_n MA_n{}^2 = k^2 \quad \rightarrow$

$\alpha_1[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2] + \alpha_2[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2] + \dots +$

$+\alpha_n[(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2] = k^2 \quad \rightarrow$

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)y^2 - 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)x -$

$-2(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n)y + \alpha_1 x_1{}^2 + \alpha_2 x_2{}^2 + \dots + \alpha_n x_n{}^2 + \alpha_1 y_1{}^2 + \alpha_2 y_2{}^2 +$

$+ \ \dots + \alpha_n {y_n}^2 = k^2 \ \Big| \cdot \dfrac{1}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n}$ $(**)$ , în cazul $\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n \neq 0$

Notăm $A = \dfrac{\alpha_1 x_1 + \ \alpha_2 x_2 + \ \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n}$, $B = \dfrac{\alpha_1 y_1 + \ \alpha_2 y_2 + \ \dots + \alpha_n y_n}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n}$ și

$C = \dfrac{\alpha_1 {x_1}^2 + \ \alpha_2 {x_2}^2 + \ \dots + \alpha_n {x_n}^2 + \alpha_1 {y_1}^2 + \ \alpha_2 {y_2}^2 + \ \dots + \alpha_n {y_n}^2}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n}$.

Relația $(**)$ devine:

$$x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = \frac{k^2}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n} \ \rightarrow$$

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 - A^2 - B^2 + C = \frac{k^2}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n} \ \rightarrow$$

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = A^2 + B^2 - C + \frac{k^2}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n} = r^2 \ \rightarrow$$

$\rightarrow$ locul geometric al punctelor $M$ este, în general, un cerc de centru $O(A, B)$ și rază $r$

<u>Discuție</u>

$I. \alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n = 0 \ \rightarrow$ locul geometric al punctelor $M$ este o dreaptă

$II. \alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n \neq 0$

*cazul* 1) $A^2 + B^2 - C + \dfrac{k^2}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n} < 0$

$\rightarrow$ locul geometric al punctelor $M$ este un cerc imaginar

*cazul* 2) $A^2 + B^2 - C + \dfrac{k^2}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n} = 0$

$\rightarrow$ locul geometric al punctelor $M$ este un punct: $M(A, B)$

*cazul* 3) $A^2 + B^2 - C + \dfrac{k^2}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n} > 0$

$\rightarrow$ locul geometric al punctelor $M$ este un cerc de centru $O(A, B)$ și rază $r$

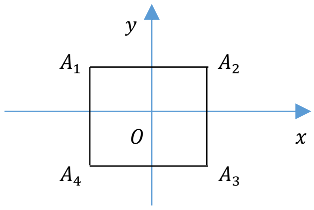
$$r = \sqrt{A^2 + B^2 - C + \frac{k^2}{\alpha_1 + \ \alpha_2 + \ \dots + \alpha_n}}$$

Centrul cercului este centrul de greutate al sistemului format din punctele fixe $A_1, A_2, \dots, A_n$ cu ponderile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Să aplicăm rezultatul pentru un caz particular:

6. Fie $A_1, A_2, A_3, A_4$ puncte fixe care reprezintă vârfurile unui pătrat și $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \neq 0$ . Să se afle locul geometric al punctelor $M$, pentru care $\alpha_1 {MA_1}^2 + \alpha_2 {MA_2}^2 + \alpha_3 {MA_3}^2 + \alpha_4 {MA_4}^2 = k^2 = \text{constant}$ .

Fie punctele $A_1(-a, a), A_2(a, a), A_3(a, -a), A_4(-a, -a), M(x, y)$.




Notăm $A = \dfrac{a(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$, $B = \dfrac{a(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$ și $C = 2a^2$ .

Ecuația devine:

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = A^2 + B^2 - C + \frac{k^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} > 0 \quad \rightarrow$$

$\rightarrow$ locul geometric al punctelor $M$ este cercul de centru $P(A, B)$ și rază $r$

$$r = \sqrt{A^2 + B^2 - C + \frac{k^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}}$$

7. Observație pentru problema 6:

Dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$ avem $A = 0, B = 0, C = 2a^2$, iar ecuația cercului este:

$x^2 + y^2 = \dfrac{k^2}{4} - 2a^2 > 0$ , unde centrul cercului este $O(0,0)$ și raza $r = \sqrt{\dfrac{k^2}{4} - 2a^2}$ .

Problema 1 provine dintr-un manual de geometrie de clasa a X-a din anul 1981, iar problemele 2, 3, 4 se regăsesc în Culegerea de probleme de geometrie a lui Gheorghe Țițeica.