Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Determinarea unor funcții pornind de la proprietăți date

1. Determinați funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(2x)=f(x)$.

   Din $f(2x)=f(x)$ prin înlocuirea lui x cu $\frac{x}{2},\frac{x}{2^2},\dots,\frac{x}{2^n}$ obținem

   $$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$$
   $$f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2^2}\right)$$
   $$\dots\quad\dots\quad\dots$$
   $$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

   $$f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)=a=\text{constantă}$$

2. Determinați funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x)=f\left(\sqrt[3]{x^2+x+2}\right)$.

   Fie $x_0\in\mathbb{R}$, atunci $f(x_0)=f\left(\sqrt[3]{{x_0}^2+x_0+2}\right)=f(x_1)=\ \dots\ =f(x_n),\forall n\in\mathbb{N}$.

   Asociem funcției f șirul $(x_n)_{n\geq 0}$, obținem $x_{n+1}=\sqrt[3]{{x_n}^2+x_n+2}$ și $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

   $l=\sqrt[3]{l^2+l+2}$ obținem $l^3-l^2-l-2=0$

   $(l^2+l+1)(l-2)=0$

   $l=2\ \to\ f(x)=\text{constantă}$

3. Determinați funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x+y)=f(x)+f(y)+ax+ay$.

   $x=y=0 \qquad f(0)=f(0)+f(0) \qquad \to \qquad f(0)=0$

   $x=1\ \ y=0 \qquad f(1)=f(1)+f(0)+a \qquad \to \qquad a=0$

   $x=y=1 \qquad f(2)=f(1)+f(1) \qquad \to \qquad f(2)=2f(1)$

   Prin inducție demonstrăm că $f(n)=nf(1)\,,\forall n\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}$.

   Apoi arătăm că $f\left(\frac{n}{m}\right)=f\left(n\frac{1}{m}\right)=nf\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1)\,,\forall\frac{n}{m}\in\mathbb{Q}$.

   Obținem $f(x)=xf(1)\quad\forall x\in\mathbb{R}$ și $f(1)\in\mathbb{R}$.

   Verificăm continuitatea în 0.

4. Studiți continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2+2^{2nx}}{x^2+xe^{nx}+e^{2nx}}$.

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}2^{2nx}\\ \lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}\\ \lim\limits_{n\to\infty}e^{2nx}\end{array}\right\}=\begin{cases}\infty\ ,2,e>1\,,x>0\\ 1\ ,2,e>1\,,x=0\\ 0\ ,2,e>1\,,x<0\end{cases}$$

   $$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{2nx}}{e^{2nx}}\ ,x>0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1}\ ,x=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\ ,x<0\end{cases}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^{2nx}\ ,x>0\\ 1\ ,x=0\\ 1\ ,x<0\end{cases}=\begin{cases}0\,,x>0\\ 1\,,x=0\\ 1\,,x<0\end{cases}$$

   $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\begin{cases}0\,,x>0\\ 1\,,x=0\\ 1\,,x<0\end{cases}$$

   f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,\infty)$, dar nu e continuă în 0.