# Polinoame – Tema 5 –

Inele de polinoame cu coeficienţi întru-un corp comutativ $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_{p,p\text{ prim}}$

Teme

1.Forma algebrică a unui polinom, funcţia polinomială, operaţii
2.Împărţirea polinoamelor. Teorema împărţirii cu rest. Teorema restului. Schema lui Horner
3.Divizibilitatea polinoamelor. Teorema lui Bézout; cmmdc şi cmmmc al unor polinoame; descompunerea unor polinoame în factori ireductibili
4.Rădăcini ale polinoamelor. Relaţiile lui Viète
5.Rezolvarea ecuaţiilor algebrice având coeficienţi în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ecuaţii binome, ecuaţii bipătrate, ecuaţii reciproce

**Definiție** $f(x) = 0$ se numeşte ecuaţie algebrică de necunoscută $x$, unde $f \neq 0$.

**Exemplu** $x^2 + 3x - 4 = 0$

**Definiție** $a \in \mathbb{C}$ este soluție a ecuației $f(x) = 0$ dacă $f(a) = 0$.

**Exemplu** $1 \in \mathbb{C}$ este soluție a ecuației $x^2 + 3x - 4 = 0$, pentru că $1 + 3 - 4 = 0$.

$1 \in \mathbb{C}$ este rădăcină a polinomului $f = X^2 + 3X - 4$, deoarece $f(1) = 1 + 3 - 4 = 0$.

**Ecuație binomă** Ecuație binomă: $x^n = z\,, n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C}$

**Exemple** Rezolvați ecuațiile:

$a)\ x^2 - 4 = 0 \ \rightarrow\ x^2 = 4\ \rightarrow x = \pm 2 \in \mathbb{R}$

$b)\ x^3 - 8 = 0\ \rightarrow\ x^3 = 8\ \rightarrow\ x^3 = 2^3\ \rightarrow\ x_k = 2\left(cos\frac{2k\pi}{3} + isin\frac{2k\pi}{3}\right) \in \mathbb{C}\,, k = \overline{0,2}$

**Ecuație bipătrată** Ecuație bipătrată: $ax^4 + bx^2 + c = 0\,, a, b, c \in \mathbb{C}\,, a \neq 0$

**Exemplu** $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

Notăm $x^2 = t$ și ecuația devine $t^2 - 7t + 10 = 0$ cu rădăcinile $t_1 = 2\,, t_2 = 5$.

Revenim la notație și rezolvăm ecuațiile binome $x^2 = 2\ \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ și

$x^2 = 5\ \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

**Ecuații reciproce** Ecuație reciprocă: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ \dots\ + a_1x + a_0 = 0\,, a_0 \neq 0$

**Exemplul 1** Rezolvarea ecuației reciproce de gradul trei

$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0\,, a \neq 0$

$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0\ \rightarrow$

$(x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0\ \ \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ ax^2 + (b - a)x + a = 0 \end{cases}$

Rezolvăm ecuația algebrică:

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0\ \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}\ \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \\ x = -1 \end{cases}$

Exemplul 2

## Rezolvarea ecuației reciproce de gradul trei

$ax^3 - bx^2 + bx - a = 0\,, a \neq 0$

$a(x^3 - 1) - bx(x - 1) = 0 \;\rightarrow$

$(x - 1)(ax^2 + (a - b)x + a) = 0 \;\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ax^2 + (a - b)x + a = 0 \end{cases}$

Rezolvăm ecuația algebrică:

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \;\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \;\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

Exemplul 3

## Rezolvarea ecuației reciproce de gradul patru

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + \; bx + a = 0\,, a \neq 0$

Împărțim ecuația cu $x^2 \neq 0$ și obținem

$ax^2 + bx + c + b\frac{1}{x} + a\frac{1}{x^2} = 0 \;\rightarrow$

$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$

Notăm $x + \frac{1}{x} = t$, iar $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ și ecuația devine $at^2 + bt + c - 2a = 0$ .

Rezolvăm ecuația algebrică:

$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + \; 3x + 1 = 0 \,|\, : x^2 \neq 0$

$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$

$t^2 - 2 + 3t + 4 = 0$

$t^2 + 3t + 2 = 0 \;\rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$

Revenim la notație

$x + \frac{1}{x} = -1 \;\rightarrow\; x^2 + x + 1 = 0 \quad\rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$x + \frac{1}{x} = -2 \;\rightarrow\; x^2 + 2x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x_{3,4} = -1$

Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuațiile algebrice:

Exercițiul 1 $\quad 5x^3 + 13x^2 + 13x + 5 = 0$

Exercițiul 2 $\quad (x^4 - 16)(x^2 + 1) = 0$

Exercițiul 3 $\quad (x^4 + x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$