Polinoame – Tema 2 –

Inele de polinoame cu coeficienţi întru-un corp comutativ $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_{p,p \text{ prim}}$

Teme

1.Forma algebrică a unui polinom, funcţia polinomială, operaţii
2.Împărţirea polinoamelor. Teorema împărţirii cu rest. Teorema restului. Schema lui Horner
3.Divizibilitatea polinoamelor. Teorema lui Bézout; cmmdc şi cmmmc al unor polinoame; descompunerea unor polinoame în factori ireductibili
4.Rădăcini ale polinoamelor. Relaţiile lui Viète
5.Rezolvarea ecuaţiilor algebrice având coeficienţi în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ecuaţii binome, ecuaţii bipătrate, ecuaţii reciproce

Împărțirea numerelor întregi

Fie $a = 27$, $b = 2$. Aflați câtul și restul la împărțirea lui a prin b.

Utilizăm Teorema împărțirii cu rest din $\mathbb{Z}$. Fie a, b numere întregi, $b \neq 0$, există două numere întregi unice astfel încât $a = b \cdot q + r$, unde $0 \leq r < |b|$.

$$\begin{array}{l|l}
27 & 2 \\ \cline{2-2}
2 & 13 \\ \cline{1-1}
\ \ 7 & \\
\ \ 6 & \\ \cline{1-1}
\ \ 1 < 2 &
\end{array} \qquad 2:2=1$$

Obținem $27 = 2 \cdot 13 + 1$

Împărțirea polinoamelor

$f = 2X^4 + X^2 + X - 3 \in \mathbb{R}[X]$

$g = X^2 - 4X \in \mathbb{R}[X]$

Aflați câtul și restul la împărțirea polinomului f la g.

grad $g = 2$

grad $r <$ grad $g = 2 \ \rightarrow \ r = aX + b \in \mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{l|l}
2X^4 \qquad\quad + X^2 + X - 3 & X^2 - 4X \\ \cline{2-2}
-2X^4 + 8X^3 & 2X^2 + 8X + 33 \\ \cline{1-1}
\qquad 8X^3 + X^2 \quad + X - 3 & \\
\qquad -8X^3 + 32X^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 33X^2 + X \quad - 3 & \\
\qquad\qquad -33X^2 + 132X & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 133X - 3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
2X^4 : X^2 = 2X^2 \\
8X^3 : X^2 = 8X \\
33X^2 : X^2 = 33
\end{array}$$

$f = g \cdot q + r$

$2X^4 + X^2 + X - 3 = (X^2 - 4X)(2X^2 + 8X + 33) + 133X - 3$

Exercițiul 1

Aflați câtul și restul la împărțirea polinomului $f = -X^3 + X^2 + X$ la $g = X - 1$.

Teorema împărțirii cu rest

<u>Teorema împărțirii cu rest</u>

$f, g \in K[X]$, $g \neq 0$ atunci $\exists!\, q, r \in K[X]$ a.î. $f = g \cdot q + r$, unde grad $r <$ grad g

Exemplu

Determinați numerele reale a și b, știind că la împărțirea polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX - 1$ la $g = X - 1$ se obține câtul $q = X^2 + X + 1$ și restul zero.

Conform Teoremei împărțirii cu rest avem:

$$X^3 + aX^2 + bX - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1) \ \rightarrow \ \begin{cases} a = 0 \in \mathbb{R} \\ b = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Teorema restului

Teorema restului

Restul împărțirii polinomului f prin $X - a$ este $r = f(a)$.

Din Teorema împărțirii cu rest avem $f = (X - a) \cdot q + r \rightarrow f(a) = r$.

Exemplu

Aflați restul la împărțirea polinomului $f = -X^3 + X^2 + X \in \mathbb{R}[X]$ la $g = X - 1$.

$X - 1 = 0 \rightarrow X = 1 \rightarrow f(1) = -1 + 1 + 1 = 1 \rightarrow r = f(1) = 1$

Schema lui Horner

Schema lui Horner

$\left.\begin{array}{l}\text{este procedeu de împărțire al polinoamelor} \\ \text{algoritm pentru calculul valorii polinomului}\end{array}\right\} \rightarrow$

Aflați câtul și restul la împărțirea polinomului $f = -X^3 + X^2 + X$ la $g = X - 1$.

$X - 1 = 0 \rightarrow X = 1$

	X^3	X^2	X^1	X^0
	-1	1	1	0
1	-1	0	1	$\boxed{1}$

Câtul este $q = -1 \cdot X^2 + 0 \cdot X^1 + 1 \cdot X^0 \rightarrow q = -X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Restul polinomului este $r = \boxed{1}$ sau $r = f(1) = 1$.

Exercițiul 2 Aflați câtul și restul împărțirii lui $f = 2X^4 + 3X^3 + 4X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ prin $g = X - 1$.

Exercițiul 3 Utilizând schema lui Horner, aflați câtul și restul împărțirii lui $f = 3X^4 + 2X^2 - 1$ prin $g = X - 2 \in \mathbb{R}[X]$.

Exercițiul 4 Determinați restul la împărțirea polinomului $f = X^{78} + 2X^{61} - 1$ prin $g = X^2 - 1$.

Exercițiul 5 Aflați numerele reale a și b astfel ca la împărțirea lui $f = aX^{11} + bX^8 - X^2 + 2$ prin polinomul $X + 1$ restul să fie 5, iar prin $X - 1$ restul să fie egal cu -3.