Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Monoid. Grup. Subgrup

Definiţie Aplicația $\varphi: M\text{x}M \to M, M \neq \emptyset, (x,y) \to \varphi(x,y)$ se numește lege de compoziție sau operație internă pe M.

exemple de mulțimi nevide: $M, G, A, K, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n, \mathcal{M}_n(K), \mathcal{F}(K)$

$(x,y) \to \varphi(x,y)$ citim: perechii (x,y) îi corespunde elementul $\varphi(x,y)$

notații pentru legea de compoziție φ: $\perp, \top, \oplus, \otimes, \cup, \cap, +, -, \cdot, *, \circ$

$+: M\text{x}M \to M \quad (x,y) \to x+y$ citim x plus y

$\circ: G\text{x}G \to G \quad (x,y) \to x \circ y$ citim x compus cu y

Definiţie PS parte stabilă $\forall x,y \in G \implies x \circ y \in G$

Definiţie A asociativitate $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)\ \forall x,y,z \in G$

Definiţie EN element neutru $\exists e \in G\ \ \forall x \in G$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x$

Definiţie ES elemente simetrizabile $\forall x \in G\ \exists x' \in G$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$

Definiţie C comutativitate $x \circ y = y \circ x \quad \forall x,y \in G$

Definiţie Se numește **monoid** perechea $(M,\circ)$, unde $M \neq \emptyset$ pentru care legea $\circ$
1) este asociativă,
2) are element neutru.

Dacă legea $\circ$ pe M este și comutativă, atunci avem **monoid comutativ**.

Definiţie Se numește **grup** perechea $(G,\circ)$, unde $G \neq \emptyset$ pentru care legea $\circ$
1) este asociativă,
2) are element neutru,
3) toate elementele sunt simetrizabile.

Dacă legea $\circ$ pe G este și comutativă, atunci avem **grup comutativ**.

Definiţie Un grup a cărui mulţime are un număr finit de elemente se numeşte grup finit.

Tabla lui Cayley este un tabel cu linii şi coloane corespunzător elementelor mulţimii finite şi a operaţiei date.

$(G,+), G = \{x_1, x_2, x_2\}$

$+$	x_1	x_2	x_3
x_1	.	.	.
x_2	.	.	x_2+x_3
x_3	.	.	.

Exemplu de grup finit Grupul lui Klein $(K,\cdot)$ este exemplu de grup finit deoarece mulţimea K are patru elemente.

$K = \{e,a,b,c\}, x^2 = e, \forall x \in K$

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Definiţie O submulțime nevidă G' a unui grup G se numește **subgrup** al lui G dacă legea de compoziție internă din G induce lege de compoziție internă pe G', a.î. G' este grup.

Teoremă $(G',\circ)$ este **subgrup** al grupului $(G,\circ)$ dacă și numai dacă
$\forall x,y \in G' \quad \to \quad x \circ y^{-1} \in G'$.

Definiție

Într-un grup $(G,\circ)$ cu element unitate, $(U(G),\circ)$ reprezintă grupul elementelor inversabile sau grupul unităților din grupul G.

Exemple de grupuri

1) $(\mathbb{Z},+)$ grupul aditiv al numerelor întregi

$U\big((\mathbb{Z},+)\big)=\mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z},\cdot)$ monoidul comutativ al numerelor întregi

$U\big((\mathbb{Z},\cdot)\big)=\{-1,1\}$

2) $(\mathbb{Q},+)$ grupul aditiv al numerelor raționale

$(\mathbb{Z},+)$ subgrup al lui $(\mathbb{Q},+)$

$(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor raționale nenule

$U(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}^*$

3) $(\mathbb{R},+)$ grupul aditiv al numerelor reale

$(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+)$ subgrupuri ale lui $(\mathbb{R},+)$

$(\mathbb{R}^*,\cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor reale nenule

$(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ subgrup al grupului $(\mathbb{R}^*,\cdot)$

$U(\mathbb{R})=\mathbb{R}^*$

4) $(\mathbb{C},+)$ grupul aditiv al numerelor complexe

$(\mathbb{R},+)$ subgrup al lui $(\mathbb{C},+)$

$(\mathbb{C}^*,\cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule

$(\mathbb{R}^*,\cdot)$ subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*,\cdot)$

$U(\mathbb{C})=\mathbb{C}^*$

5) $\big(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),+\big)$ grupul aditiv comutativ al matricelor de tipul (m,n)

$(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$ grupul liniar complet de ordin n pe $\mathbb{R}$

unde $GL(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})|\ detA\neq 0\}$

6) $(\mathcal{B}(M),\circ)$ grupul aplicațiilor bijective în raport cu operația de compunere

unde $\mathcal{B}(M)=\{f\colon M\to M\mid f\text{ bijectivă}\}$

$(S_n,\circ)$ grupul simetric de grad n

unde $S_n=\{f\colon\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}\mid f\text{ bijectivă}\}$ este mulțimea permutărilor, iar $\circ$ este operația de compunere a acestora

7) $(\mathbb{Z}_n,+)$ grupul aditiv al claselor de resturi modulo n

$(\mathbb{Z}_n,\cdot)$ monoidul comutativ al claselor de resturi modulo n

$U\big((\mathbb{Z}_n,\cdot)\big)=\{\,\hat{k}\in\mathbb{Z}_n\big|\ (k,n)=1\}$

8) $(U_n,\cdot)$ grupul rădăcinilor de ordinul n ale unității, $U_n=\{z\in\mathbb{C}|\ z^n=1\,,n\in\mathbb{N}^*\}$

Exerciții propuse

1. Fie $M=\{X(a)=I_2+aA\ \mid a\in\mathbb{R}\}$, unde $A=\begin{pmatrix}4&-6\\2&-3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

   a) Arătați că $X(a)X(b)=X(ab+a+b)\in M$.

   b) Calculați $X(1)+X(2)+\cdots+X(100)$.

   c) Determinați mulțimea elementelor inversabile ale lui M.

2. Fie $U=\{z\in\mathbb{C}^*|\ |z|=1\}$. Arătați că U este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

3. Considerăm mulțimea $G=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}a^x&0&0\\0&1&0\\0&x&1\end{pmatrix}\middle|\ a\in(1,\infty),x\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   a) Arătați că $I_3\in M$.

   b) Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y),\forall x,y\in\mathbb{R}$.

   c) Arătați că mulțimea G în raport cu înmulțirea matricelor formează grup.

4. Fie mulțimea $M=\{a+b\sqrt{3}\ |a,b\in\mathbb{Z}\,,a^2-3b^2=1\}$.

   a) Arătați că numerele -1 și 1 aparțin mulțimii M.

   b) Demonstrați că $xy\in M$, pentru orice $x,y\in M$.

c)Arătaţi că dacă $x \in M$ atunci și $\frac{1}{x} \in M$.

5. Considerăm mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \hat{2}y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Z}_5 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$.

a)Arătaţi că matricele O_2 şi I_2 aparţin lui G.

b)Demonstraţi că $A + B \in G$, pentru orice $A, B \in G$.

c)Verificaţi că mulţimea G împreună cu operaţia de adunare a matricelor este grup.

6. Fie mulțimea $G = (0,1)$ și legea $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$, $\forall x, y \in G$.

a)Calculați $\frac{1}{3} * \frac{1}{2}$.

b)Determinați elementul neutru al legii $*$.

c)Rezolvați ecuația $x * x = \frac{1}{5}$.

7. Arătați că mulțimea $GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) |\ detA \neq 0\}$ împreună cu operația de înmulţire a matricelor formează grup.

8. Arătați că mulțimea M împreună cu înmulțirea matricelor formează un subgrup al grupului $GL_2(\mathbb{R})$, unde

$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

9. Fie mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ împreună cu operația de înmulțire a matricelor.

a)Determinați numărul de elemente ale mulțimii G.

b)Arătaţi că matricea I_3 aparţin lui G.

c)Aflaţi elementele inversabile ale mulţimii G.

10. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $\circ$ astfel $x \circ y = xy - 2x - 2y + a$, $a \in \mathbb{R}$.

a)Determinați numărul real a pentru care $2 \circ (-2) = 0$.

b)Aflați a pentru care legea de compoziție $\circ$ admite element neutru.

c)Demonstrați că, dacă $a \in (6, \infty)$, atunci mulțimea $(2, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție $\circ$.

d)Pentru $a = 6$, rezolvați ecuația $x \circ x \circ x = 10$.

e)Pentru $a = 6$, determinați perechile (m, n) de numere naturale pentru care $m \circ n = 3$.