Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Permutări – Sinteză

$\sigma:\{1,2,3,\dots,n\}\to\{1,2,3,\dots,n\}, \sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}\in S_n, n\in\mathbb{N}^*$

σ este permutarea sigma de gradul n.

S_n este mulțimea permutărilor de gradul n, iar numărul permutărilor este $|S_n| = n!$.

„ $\circ$ ”,„ $\cdot$ ”reprezintă operația de compunere sau de înmulțire a permutărilor.

$(S_n, \circ)$ este grupul permutărilor de gradul n , unde:

1) $\circ$ este asociativă,
2) $\circ$ are element neutru, $e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ 1 & 2 & 3 & \dots & n\end{pmatrix}$ – permutarea identică,
3) toate elementele sunt inversabile, $\sigma^{-1}\in S_n$.

În general, compunerea permutărilor nu este comutativă.

Ordinul permutării σ este cel mai mic număr natural k pentru care $\sigma^k = e$.

Soluția ecuației $\sigma\cdot x\cdot\pi=\theta$ este $x=\sigma^{-1}\cdot\theta\cdot\pi^{-1}$.

$m(\sigma)$ este suma inversiunilor permutării.

Perechea (i,j) este o inversiune a lui σ dacă $i<j$ și $\sigma(i)>\sigma(j)$.

$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}$ reprezintă semnul sau signatura permutării σ.

$\varepsilon(\sigma)=+1 \;\to\;$ σ este permutare pară. Numărul permutărilor pare este $\frac{n!}{2}$.

$\varepsilon(\sigma)=-1 \;\to\;$ σ este permutare impară. Numărul permutărilor impare este $\frac{n!}{2}$.

$$\varepsilon(\sigma)=\prod_{1\le i\le j\le n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}, \sigma\in S_n$$

Proprietăți ale signaturii

$\varepsilon(\sigma\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$

$\varepsilon(\sigma^2)=\varepsilon(\sigma)^2$

$\varepsilon(\sigma^{-1})=\varepsilon(\sigma)$

$\varepsilon(e)=1$

$(ij)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & j & \dots & n\\ 1 & 2 & 3 & \dots & j & \dots & i & \dots & n\end{pmatrix}$ este transpoziția ij. Numărul transpozițiilor este C_n^2.

Proprietăți ale transpoziției

$(ij)=(ji)$

$(ij)^2=e$

$(ij)^{-1}=(ij)$

$\varepsilon\big((ij)\big)=-1 \leftrightarrow$ transpoziția este o permutare impară

Un ciclu este o funcție $\sigma:\{\sigma_1,\sigma_2,\dots\ \sigma_k\}\to\{\sigma_1,\sigma_2,\dots\ \sigma_k\}$ care asociază $\sigma_1\to\sigma_2\to\ \dots\to\sigma_k\to\sigma_1$. Notația matematică este $(\sigma_1,\sigma_2,\dots\ \sigma_k)$.

O permutare este o mulțime de cicluri.

Exemplul 1. Permutarea $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ este ciclul $(1,2,3)$, deoarece $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Exemplul 2. Permutarea $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ are structura ciclică $(1,2)(3)$.

Exemplul 3. Permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}$ se descompune în cicluri și apoi în produs de transpoziții, astfel $\sigma=(1,3)(2,4,5)=(13)(24)(45)$.

Numărul inversiunilor este $m(\sigma) = 2 + 2 + 0 + 1 = 5$, atunci $\varepsilon(\sigma) = -1$, prin urmare σ este permutare impară și se descompune în număr impar de transpoziții. Descompunerea nu este unică.

Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculați $\sigma\theta, \theta\sigma, \sigma^2, \sigma^{2020}, \theta^{11}, \theta^{100}$.

$\sigma\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\theta^2 = \theta\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\theta^3 = \theta^2\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \sigma$

$\theta^4 = \sigma\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e \to$ ordinul lui θ este 4 $\to \theta^{11} = \theta^{4\cdot 2+3} = \theta^3 = \sigma$

2. Rezolvați ecuațiile: $x\theta = \sigma, \sigma x = \theta, \theta^3 x = e$, unde $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$x\theta = \sigma \,|\cdot\theta^{-1} \to x = \sigma\theta^{-1} \to x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ citim din linia a doua, ordonăm și obținem $\theta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3. Aflați semnul permutărilor $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \theta^{-1}, \sigma, \sigma^{-1}$.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$

Decât 2 e mai mic 1, ca 3 e mai mic 1, decât 4 e mai mic 1, atunci avem trei inversiuni $m(\sigma) = 1 + 1 + 1 = 3$ și $\varepsilon(\sigma) = -1$.

4. Descompuneți în produs de transpoziții permutarea σ.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \,|\cdot (12) \to$

$\sigma(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma(12)(13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (14) \to$

$\sigma = (14)(13)(12)$

O altă variantă. $\sigma = (1,2,3,4) = (12)(23)(34)$

5. Descompuneți în produs de transpoziții permutările α, β, γ, δ.