Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Proprietăți ale integralei nedefinite

$f, g: I \to \mathbb{R}$ admit primitive pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$.

1) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Exemplu. $\int (x+1)dx = \int xdx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x + \mathcal{C}$

2) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \ , a \in \mathbb{R}^*$

Exemplu. $\int 2xdx = 2\int xdx = 2\frac{x^2}{2} + \mathcal{C} = x^2 + \mathcal{C}$

3) $\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx \ \ , a, b \in \mathbb{R}^*$

Exemplu. $\int (6x^2 - 2)dx = 6\int x^2dx - 2\int dx = 6\frac{x^3}{3} - 2x + \mathcal{C} = 2x^3 - 2x + \mathcal{C}$

4) Orice funcție $f: I \to \mathbb{R}$ continuă pe intervalul I, admite primitive pe I.

Exemplu. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x & , x < 1 \\ 2ex - e & , x \geq 1 \end{cases}$ admite primitive, apoi determinați primitivele funcției f.

$f(x) = e^x, x < 1$, funcție elementară → funcție continuă (1)
$f(x) = 2ex - e, x \geq 1$, funcție elementară → funcție continuă (2)
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = f(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) \ \to e = e = e \ \to f$ este continuă în punctul 1 (3)
Din (1), (2), (3) funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$ → f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
$F(x) = e^x + c_1, x < 1$

$F(x) = 2e\frac{x^2}{2} - ex + c_2 = ex^2 - ex + c_2, x \geq 1$

F primitiva funcției f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ → F continuă pe $\mathbb{R}$ → F continuă în punctul 1
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} F(x) = F(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} F(x) \ \to e + c_1 = c_2 \ \to$

$F(x) = \begin{cases} e^x + c & , x < 1 \\ ex^2 - ex + e + c & , x \geq 1 \end{cases}$

5) Dacă o funcție nu are proprietatea lui Darboux pe un interval, atunci funcția nu admite primitive pe acel interval.

Exemplu. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$
Imaginea funcției $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ nu este interval → f nu are Proprietatea lui Darboux →
f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Exerciții

1. Calculați $\int \frac{x-1}{x^2+1}dx \ , x \in \mathbb{R}$.
2. Studiați dacă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & , x \leq 0 \\ 3x + 2 & , x > 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.
3. Determinați o primitivă a funcției $f: (-2,2) \to \mathbb{R}, f(x) = \max(1, x^2)$.