Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Primitivele unei funcții

Fie funcția $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I interval de numere reale.

Definiție. Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I, dacă există o funcție $F: I \to \mathbb{R}$, astfel încât: 1) F să fie derivabilă pe I,

2) $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Exemplu. Fie $F_1, F_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 2$, $F_2(x) = \frac{x^3}{3}$ două funcții elementare.

Constatăm că derivatelor acestora sunt egale $F_1{}'(x) = x^2 = F_2{}'(x)$.

De aici deducem că F_1 și F_2 sunt primitive ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Observație. $F_1(x) - F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 2 - \frac{x^3}{3} = 2$ (constantă) $\to$ două primitive ale unei funcții f diferă printr-o constantă.

Teoremă. Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ admite două primitive $F_1, F_2: I \to \mathbb{R}$ pe intervalul I, atunci există o constantă $c \in \mathbb{R}$, astfel încât $F_1(x) - F_2(x) = c, \forall x \in I$.

Concluzie. Dacă o funcție f admite o primitivă, atunci aceasta admite o infinitate de primitive.

Definiție. Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I. Mulțimea tuturor primitivelor funcției f pe intervalul I se numește integrala nedefinită a funcției f.

Notație: $\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ este mulțimea funcțiilor constante

Exemplu. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + \mathcal{C}$, $x \in \mathbb{R}$

Definiție. Operația prin care se determină primitivele unei funcții se numește integrare.

Exemple. Deducem primitivele unor funcții utilizând derivatele funcțiilor:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = sinx \ \to (sinx)' = cosx \ \to \int cosxdx = sinx + \mathcal{C}$

2) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = lnx \ \to (lnx)' = \frac{1}{x} \ \to \int \frac{1}{x} dx = lnx + \mathcal{C}$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} \ \to \left(\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2 + a^2}$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + \mathcal{C}$$

Dacă funcția $f: I \to \mathbb{R}$ admite primitive și $F: I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a sa, atunci:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in I$$

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C}$$

$$\int F'(x)dx = F(x) + \mathcal{C}$$

Observație. Primitiva reprezintă o singură funcție, iar integrala nedefinită reprezintă o mulțime de funcții.

Exemplu. $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = sinx - 1$ este o primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = cosx$, iar integrala funcției f este $\int f(x)dx = \int cosxdx = sinx + \mathcal{C}$.

Noţiunea de primitivă se poate extinde pentru funcţii al căror domeniu este format din reuniunea mai multor intervale disjuncte. În acest caz diferenţa a două primitive nu este neapărat o constantă.

Exemplu. Fie funcția $f: (1,2) \cup (3,4) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Construim două primitive ale lui f

$$F_1, F_2: (1,2) \cup (3,4) \to \mathbb{R}, F_1(x) = \frac{x^3}{3} \text{ și } F_2(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 1, x \in (1,2) \\ \frac{x^3}{3} - 1, x \in (3,4) \end{cases}.$$

Exerciţii

1) Determinați funcția f care admite ca primitivă funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

2) Determinați primitivele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x+1)^2 - \frac{1}{x^2 + 1}$.

3) Determinați numerele reale a, b și c, știind că funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = (x^2 + 1)e^x$ este primitiva funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$.