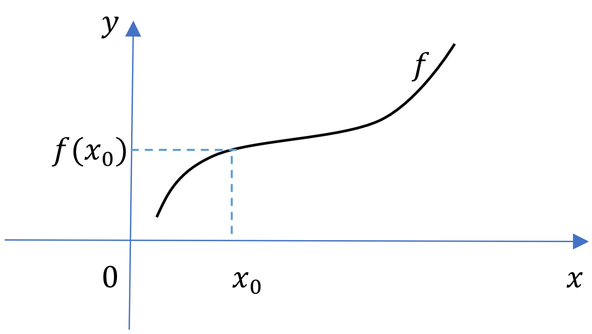
Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Funcţii continue

1.Funcţii continue într-un punct
2.Operaţii cu funcţii continue
3.Funcţii continue pe o mulţime

Definiție. Fie $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Funcția f este continuă în $x_0 \in D$, dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(x_0)$ există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$ să avem $f(x) \in V$.

Interpretare grafică a continuității unei funcții. Prin funcție cu grafic continuu înțelegem o funcție al cărei grafic nu are întreruperi.



Teorema de caracterizare a continuității. Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ punct de acumulare. Următoarele afirmații sunt echivalente:

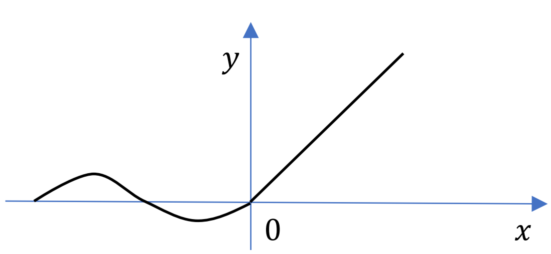
1) f este continuă în x_0
2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
3) $(\forall)(x_n)_{n\geq 1} \subset D$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$
4) $(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $(\forall) x \in D, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
5) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

Exemple

1. Studiați continuitatea funcției $f(x) = \begin{cases} sinx, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ în punctul de abscisă 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} sinx = sin\,0 = 0$, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$

avem $0 = 0 = 0 \Rightarrow f$ este continuă în 0



2. Studiați continuitatea funcției $f(x) = \begin{cases} sinx \ , x < 0 \\ x + a \ , x \geq 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$, în punctul de abscisă 0.

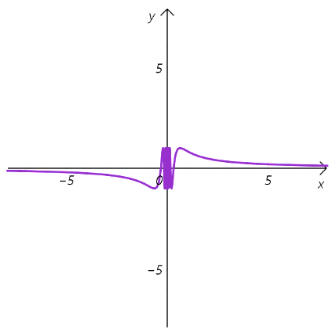
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} sinx = sin\, 0 = 0$, $f(0) = a$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x + a) = a$

I. dacă $a = 0$ atunci funcția f este continuă în 0

II. dacă $a \in \mathbb{R}^*$ atunci funcția f nu e continuă în 0

3. Studiați continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \quad\ , x = 0 \end{cases}$ în punctul de abscisă 0.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} sin\frac{1}{x}$ nu există , $f(0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} sin\frac{1}{x}$ nu există $\Rightarrow f$ nu este continuă în 0



Observații. Continuitatea unei funcții într-un punct din domeniul de definiție se poate verifica determinând limita în acel punct și comparând-o cu valoarea funcției. Pentru a arăta că funcția nu este continuă în punctul x_0, se determină limitele laterale, dacă sunt diferite va rezulta că limita în punct nu există și funcția nu este continuă. În alte cazuri, se poate utiliza caracterizarea limitei prin șiruri. Dacă funcția nu este continuă în x_0 ea se numește funcție discontinuă în x_0, iar x_0 este punct de discontinuitate. Problema continuității funcției nu se pune în punctele în care funcția nu este definită, nici la $\pm\infty$. O funcție este continuă într-un punct izolat al domeniului.

<u>Operații cu funcții continue</u>

Dacă funcțiile $f, g: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ sunt continue în $x_0 \in D$, atunci:

1) $f + g$ este continuă în x_0

2) αf este continuă în x_0 , $\alpha \in \mathbb{R}$

3) $f \cdot g$ este continuă în x_0

4) dacă $g(x_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0

5) dacă $f(x_0) > 0$, atunci f^g este continuă în x_0

Dacă funcția $g: I \to D$ este continuă în $x_0 \in I$ și funcția $f: D \to \mathbb{R}$ este continuă în $g(x_0) \in D$, atunci funcția $f \circ g$ este continuă în x_0.

Definiție. Funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește continuă pe mulțimea D dacă este continuă în fiecare punct $x_0 \in D$.

Teoremă. Funcțiile elementare sunt continue pe domeniul lor de definiție.

Observație. Funcțiile elementare sunt: funcțiile polinomiale, funcțiile raționale, funcția putere, funcția radical, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcțiile trigonometrice directe, funcțiile trigonometrice inverse.

Exemple

1. Studiați continuitatea funcției $f(x) = \begin{cases} sinx\,, & x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$ pe $\mathbb{R}$.

(1) $f(x) = sinx, x < 0$ funcţie elementară $\rightarrow$ f funcţie continuă

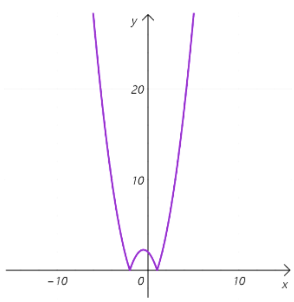
(2) $f(x) = x, x \geq 0$ funcţie elementară $\rightarrow$ f funcţie continuă

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} sinx = sin\,0 = 0\,, f(0) = 0\,, \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x = 0$ avem $0 = 0 = 0 \Rightarrow f$ este continuă în 0

Din (1), (2), (3) $\rightarrow$ f este funcţie continuă pe $\mathbb{R}$.

2. Studiați continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\,, f(x) = |x^2 + x - 2|$.

Funcția modul a unei funcții elementare este la rândul ei funcție continuă.



Exerciții

Studiați continuitatea funcțiilor:

1. $f(x) = [x]\,, x \in \mathbb{R}\,, [\cdot]$ este partea întreagă a unui număr real

2. $f(x) = \begin{cases} -x + a & , x < 0 \\ x^2 + x + 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad , a \in \mathbb{R}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin(x^2 - 1)}{x - 1} & , x > 1 \\ a & , x = 1 \\ \dfrac{e^x - e}{x - 1} & , x < 1 \end{cases} \quad , a \in \mathbb{R}$