Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Puncte de discontinuitate

Definiție. Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ un punct de discontinuitate al funcției f.

x_0 este punct de discontinuitate de speța I dacă limitele laterale în x_0 există, sunt finite și diferite, în orice altă situație x_0 este punct de discontinuitate de speța a II-a.

Exemple

1. Studiați continuitatea funcției $f(x) = \begin{cases} 3-2x\,, & x<0 \\ x+1\,, & x \geq 0 \end{cases}$ în punctul de abscisă 0.

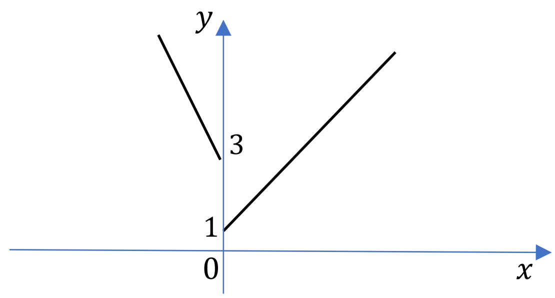
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (3-2x) = 3$$

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x+1) = 1$$

avem $3 \neq 1 = 1 \Rightarrow f$ nu este continuă în 0

0 este punct de discontinuitate de speța I deoarece limitele laterale sunt finite, dar diferite.



2. Studiați natura punctului de discontinuitate pentru funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} & ,x>1 \\ x-2 & ,x=1 \\ \dfrac{2^{x-1}-1}{x^2-x} & ,0<x<1 \end{cases}.$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2^{x-1}-1}{x^2-x} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2^{x-1}-1}{(x-1)x} = ln2$$

$$f(1) = 1-2 = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1-\sqrt{x}}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1-x}{(x-1)(x+1)(1+\sqrt{x})} = -\frac{1}{4}$$

1 este punct de discontinuitate de speța I (întâi) pentru funcția f.

3. Studiați natura punctelor de discontinuitate pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

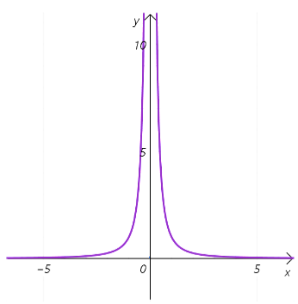
Considerăm două șiruri $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $a_n, b_n < x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, unde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0 \to \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = 0 \to 1 \neq 0 \to \nexists \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$

x_0 este punct de discontinuitate de speța a doua.

4. Studiați natura punctului de discontinuitate pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0_+} = +\infty$ și $f(0) = 0$

0 este punct de discontinuitate de speţa a doua.



5. Studiați natura punctului de discontinuitate pentru $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \sin\frac{1}{x}$ nu există, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \sin\frac{1}{x}$ nu există

0 este punct de discontinuitate de speţa a doua.

Pentru a arăta că $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \sin\frac{1}{x}$ considerăm şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ atunci $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$, $f(b_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 0 \neq 1$.

<u>Proprietate</u>. O funcţie monotonă $f: D \to \mathbb{R}$ nu poate avea decât puncte de discontinuitate de speța întâi pe D, iar mulțimea acestora fiind cel mult numărabilă.

Exemplu

Arătați că $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \quad, x = 0 \end{cases}$ nu este monotonă pe nici un interval care conţine originea.

Deoarece 0 este punct de discontinuitate de speţa a doua, f nu este monotonă pe nici un interval care conţine originea. Putem constata şi că ecuaţia $f(x) = 0$ are o infinitate de soluţii, deci f nu poate fi monotonă.

Exerciții

Stabiliți natura punctului de discontinuitate pentru funcția:

1. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} cos\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

2. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \quad, x = 0 \end{cases}$

3. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}} & , x \neq 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$

4. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 , & x < 2 \\ x + 1 & , x \geq 2 \end{cases}$

5. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} a - 2x , & x > -1 \\ x + 1 & , x \leq -1 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$