Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Calculul limitelor funcţiilor polinomiale

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \dots\ +a_1x+a_0\quad ,a_n\neq 0, a_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,n}, n\in\mathbb{N}^*$$

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n=\infty\ ,n\in\mathbb{N}^*$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=\dfrac{1}{\infty}=0\ ,n\in\mathbb{N}^*$

Pentru a calcula $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ dăm factor comun forțat termenul de grad maxim al funcției f, adică pe a_nx^n. Prin factor comun forțat înțelegem factorul comun care nu se divide cu toți termenii funcției și teoretic avem de impus condiția $x\neq 0$, pe care de cele mai multe ori o ignorăm, deoarece limita funcției o calculăm pentru x tinde la ∞. Analog calculăm $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \dots\ +a_1x+a_0)=\lim\limits_{x\to\infty}a_nx^n\left(1+\dfrac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_nx^n}+\ \dots\ +\dfrac{a_1x}{a_nx^n}+\dfrac{a_0}{a_nx^n}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}a_nx^n\left(1+\frac{\overbrace{a_{n-1}}^{\nearrow 0}}{a_nx}+\ \dots\ +\frac{\overbrace{a_1}^{\nearrow 0}}{a_nx^{n-1}}+\frac{\overbrace{a_0}^{\nearrow 0}}{a_nx^n}\right)=\lim_{x\to\infty}a_nx^n=\begin{cases}\infty, a_n>0\\ -\infty, a_n<0\end{cases},a_n\in\mathbb{R}^*$$

În continuare pentru a calcula limita spre $+\infty/-\infty$ a unei funcții polinomiale folosim regula:
$\lim\limits_{x\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \dots\ +a_1x+a_0)=\lim\limits_{x\to\infty}a_nx^n\ ,a_n\in\mathbb{R}^*, n\in\mathbb{N}^*$

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+2x+4)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^2-2x^3)=\lim\limits_{x\to\infty}(-2x^3)=-2\cdot\infty=-\infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x^2-2x^3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3)=-2\cdot(-\infty)=+\infty$

Valoarea limitei în $x_0\in\mathbb{R}$ se obține calculând valoarea funcției polinomiale în acel punct.
$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+4)=1+2+4=7$
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2-2x^3)=1+0-0=1$

Calculul limitelor funcţiilor raţionale

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \dots\ +a_1x+a_0\quad ,a_n\neq 0, a_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{0,n}, n\in\mathbb{N}^*$$
$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ \dots\ +b_1x+b_0\ ,b_m\neq 0, b_j\in\mathbb{R},\ j=\overline{0,m}, m\in\mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \dots\ +a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ \dots\ +b_1x+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}\cdot\infty & ,n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & ,n=m\\ 0 & ,n<m\end{cases}$$

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3+2x-3}{x^2+8x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}(-x)=-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+8x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+x^2+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-\infty}=0$

Valoarea limitei funcției raționale în $x_0\in\mathbb{R}$, punct în care nu se anulează numitorul, se obține calculând valoarea funcției polinomiale în acel punct, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^2+8x+1}=\dfrac{1+2-3}{1+8+1}=0$

2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+8x+1}=\dfrac{1-2-3}{1-8+1}=\dfrac{2}{3}$

Dacă $x_0\in\mathbb{R}$ este rădăcină a funcției g, $g(x_0)=0$, distingem cazurile:

Exemple

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2+2x-3}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+3)}=\dfrac{0}{4}=0$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-6x+5}=\dfrac{1+2-3}{1-6+5}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x-1)}(x-5)}=\dfrac{4}{-4}=-1$

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{-1}{0}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-3}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{-1}{0_+}=-\infty$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{1+2-3}{1-1-1+1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{4}{0}\ \nexists$

Nu există limita, deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{4}{0_-}=-\infty\neq\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{4}{0_+}=+\infty$.

Dacă $x_0\in\mathbb{R}$ este rădăcină de ordin p a funcției f, atunci descompunem $f(x)=(x-x_0)^pf_1(x)$, iar dacă x_0 este rădăcină de ordin q a funcției g, atunci avem $g(x)=(x-x_0)^qg_1(x)$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^pf_1(x)}{(x-x_0)^qg_1(x)}=\begin{cases}0 & \text{pentru } p>q\\ \dfrac{f_1(x_0)}{g_1(x_0)} & \text{pentru } p=q\\ \infty\cdot\dfrac{f_1(x_0)}{g_1(x_0)} & \text{pentru } p<q,\ q-p \text{ număr par}\\ \nexists & \text{pentru } p<q,\ q-p \text{ număr impar}\end{cases}$$