

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Teorema sinusurilor

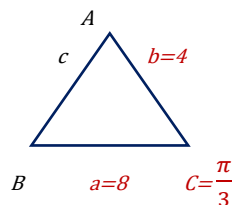
În orice triunghi ABC avem $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Teorema cosinusului

În orice triunghi ABC avem $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Exemplul 1. Rezolvați triunghiul oarecare ABC , dacă $a = 8$, $b = 4$ și $C = \frac{\pi}{3}$.

Rezolvare



Din Teorema cosinusului avem

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 48 \rightarrow c = 4\sqrt{3}$$

Din Teorema sinusurilor avem

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{8}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} \rightarrow \frac{8}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \begin{cases} \sin A = 1 \\ \sin B = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Observația 1. Un triunghi este rezolvat când se cunosc cele șase elemente ale sale. Din datele problemei cunoaștem a, b, C și avem de aflat c, A, B . După cum remarcăm, în rezolvarea exercițiului am utilizat teoremele enunțate anterior.

Observația 2. Pentru rezolvarea triunghiului oarecare avem trei cazuri LLL, LUL, ULU, corespunzătoare cazurilor de congruență studiate în anii anteriori. Constatăm că, în fiecare caz este necesar să cunoaștem cel puțin o latură.

Exemplul 2. Rezolvați triunghiul oarecare ABC , dacă $a = 8, b = 4$ și $c = 6$.

Rezolvare

Din Teorema cosinusului avem

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos A = \frac{4^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{1}{4} \in [-1, 1]$$

Observația 3. Un unghi se consideră cunoscut, dacă se cunoaște valoarea unei funcții trigonometrice atașate acestuia.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Exemplul 3. Rezolvați triunghiul oarecare ABC , dacă $A = \frac{\pi}{4}, b = 4$ și $C = \frac{\pi}{3}$.

Rezolvare

$$A + B + C = \pi \rightarrow \frac{\pi}{4} + B + \frac{\pi}{3} = \pi \rightarrow B = \frac{5\pi}{12}$$

Din Teorema sinusurilor avem

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\sin \frac{5\pi}{12}} = \frac{c}{\sin \frac{\pi}{3}} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{4 \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{5\pi}{12}} \\ c = \frac{4 \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{5\pi}{12}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dots \\ c = \dots \end{cases}$$

Aplicația 1. Rezolvați triunghiul oarecare ABC , dacă $a = 7, b = 8$ și $c = 9$.

Aplicația 2. Rezolvați triunghiul oarecare ABC , dacă $b = 6, c = 4$ și $A = \frac{\pi}{3}$.

Aplicația 3. Rezolvați triunghiul oarecare ABC , dacă $A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{3}$ și $c = 10$.

Aplicația 4. Rezolvați triunghiul oarecare ABC , dacă $a = 12, B = \frac{\pi}{4}$ și $C = \frac{\pi}{6}$.