

Trigonometrie – 6 – idei de rezolvare

1. Determinați cel mai mare element al mulțimii $\{\sin 2, \sin 3, \sin 4\}$.

Justificați răspunsul.

$2 < 3 < 4$ și funcția sinus este descrescătoare pe $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, atunci $\sin 2$ este cel mai mare element al mulțimii $\{\sin 2, \sin 3, \sin 4\}$.

2. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + \sin x$ este impară.

$$f(-x) = -f(x)$$

3. Aduceți la o formă mai simplă suma $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin 15x, x \in \mathbb{R}$.

$$S = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin 15x \mid \cdot \sin x$$

4. Arătați că $1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$.

$$1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0 \mid \cdot \sin \frac{\pi}{5}$$

5. Calculați $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$, știind că $\operatorname{tg} 3x = \frac{2}{3}$.

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 3x(2\cos 2x + 1)}{\cos 3x(2\cos 2x + 1)} = \dots$$

6. Arătați că $\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} + \operatorname{tgatgb} = 1$, dacă $a + b = \frac{\pi}{4}, a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$a + b = \frac{\pi}{4} \rightarrow \operatorname{tg}(a + b) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \rightarrow \operatorname{tga} + \operatorname{tgb} + \operatorname{tgatgb} = 1$$

7. Știind că $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{4}$, calculați $\cos 2x$.

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{4} \rightarrow \dots$$

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

8. Calculați $\frac{\sin a + 2\sin 3a + \sin 5a}{\cos a + 2\cos 3a + \cos 5a}$, dacă $\operatorname{tga} = 2$.

$$\frac{\sin a + 2\sin 3a + \sin 5a}{\cos a + 2\cos 3a + \cos 5a} = \frac{2\sin 3a(\cos 2a + 1)}{2\cos 3a(\cos 2a + 1)} = \dots$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tga} - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a} \rightarrow \dots$$

9. Verificați paritatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2022} - \cos 2022x + 2022$.

$$f(-x) = f(x) \rightarrow f \text{ funcție pară}$$

10. Calculați $\sin 2a$, dacă $\operatorname{tga} = 2, a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\sin 2a = \frac{2\operatorname{tga}}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$