Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Asimptote. Continuitate. Derivabilitate. Aplicații – 5

1. Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{\sin(x^2-1)}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x+1)}=\ \dots$$

2. Determinați asimptotele funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

$y=1\,,x=-1\,,x=1$

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Calculați $f'(2)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}\,,f(x)=x\,,f'(x)=1\,,g(x)=\sqrt{1+x^2}\,,g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

4. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}\,,f(x)=x^2-\sqrt{x}$ în punctul de abscisă 1.

$$f'(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad\to\quad f'(1)=\ \dots$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

5. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, x\le 1\\ x^3+x-1, x>1\end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

f este continuă pe intervale și $f_s(1)=f(1)=f_d(1)\ \to\ f$ este continuă pe $\mathbb{R}$

6. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\begin{cases}x^2+4x, x\ge -1\\ 2x-1\,,\ \ x<-1\end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

f este derivabilă pe intervale și $f_s{}'(-1)=f_d{}'(-1)\ \to\ f$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$

7. Studiați continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}, x>1\\ \dfrac{1}{3}\,,\qquad x\le 1\end{cases}$ în punctul 1 .

$f_s(1)=f(1)\ne f_d(1)\ \to\ f\ \dots$

8. Calculați derivata funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - x)lnx$.

$x > 0 \quad \to \quad D = \; ...$

$f'(x) = (2x - 1) \cdot lnx + (x^2 - x) \cdot \frac{1}{x} = \; ...$

9. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f: (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = xsinx$, știind că tangenta este paralelă cu dreapta de ecuație $x - y + 1 = 0$.

$x - y + 1 = 0 \; \to m = 1 \; \to f'(x_0) = 1 \quad \to x_0 = \frac{\pi}{2}$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

10. Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției $f: (2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 4}{x - 2}$.

$y = x + 7$

11. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^x$. Rezolvați ecuația $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x = (x^2 + 2x + 1)e^x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 + 2x + 1 = 0$

12. Calculați derivata funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x - 3}{x + 3}}$.

$\frac{x - 3}{x + 3} \geq 0 \quad \to \quad D = \; ...$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x - 3}{x + 3}}} \cdot \left(\frac{x - 3}{x + 3}\right)'$