

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Asimptote. Derivate. Aplicații - 6

1. Fie funcția $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$. Calculați $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

$$f'(x) = \dots$$

$$f'(2) = \dots$$

2. Determinați asimptotele funcției $f: (-\infty, 0] \cup [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$.

$$y = -2x + \frac{1}{2} \text{ ecuația asimptotei spre } -\infty$$

$$y = -\frac{1}{2} \text{ ecuația asimptotei spre } +\infty$$

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)e^x$. Calculați $f'(0) + f''(0)$.

$$f'(x) = (x^3 + 4x^2 + 3x + 2)e^x$$

$$f''(x) = (x^3 + 7x^2 + 11x + 5)e^x$$

4. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$ este continuă și derivabilă pe \mathbb{R} .

f compusă din funcții elementare $\rightarrow f$ continuă pe \mathbb{R}

f este derivabilă pe intervale și $f'_s(0) = f'_d(0) \rightarrow f$ este derivabilă pe \mathbb{R}

5. Rezolvați inecuația $f'(x) \geq 0$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \sin x$.

$$1 - \cos x \geq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R}$$

6. Fie $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin x - x\sqrt{1 - x^2}$.

Arătați că $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-1, 1)$.

$$f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \geq 0, \forall x \in (-1, 1)$$

7. Rezolvați ecuația $f''(x) = 0$, pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 1}$.

$$f''(x) = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2 + 1)^3}$$

8. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$. Arătați că $f''(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$.

$$f''(x) = \frac{2x + 1}{x^2(x + 1)^2} > 0, \forall x \in (0, \infty)$$

9. Rezolvați ecuația $f'(x) = 0$, pentru funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1} e^{|x|}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} e^x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x+1} e^{-x}, & x < 0, x \neq -1 \end{cases}$$

10. Calculați derivata $f^{(2022)}$ atașată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2022} + x^{1011}$.

$$f^{(2022)}(x) = 2022!$$

11. Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcției $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2, & x \leq 0 \\ e^x + b, & x > 0 \end{cases}$

să i se poată aplica teorema lui Lagrange.

$$\begin{aligned} f &\text{ continuă pe } [-2, 2] \\ f &\text{ derivabilă pe } (-2, 2) \end{aligned} \rightarrow \dots$$

12. Determinați derivata de ordinul doi a funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right)$.

$$f''(x) = \ln x$$