Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Continuitate. Derivabilitate. Aplicații – 7

1. Rezolvați ecuația $f'(x) + f''(x) = 0$, unde $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} - lnx$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

2. Calculați $f'(1)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Calculați $\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - \sqrt{5}}{x+2}$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(-2) = \cdots$$

4. Rezolvați ecuația $f''(x) = 0$, pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ln(x^2+1)$.

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2+1)^2}$$

5. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^5 + x^2 - 6x + 2$. Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,2)$.

$f(1)f(2) < 0$ conform $Lemei\ Bolzano - Cauchy$ ...

6. Arătați că $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = arctgx + \frac{x}{x^2+1}$.

$$f'(x) = \frac{2}{(x^2+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

7. Rezolvați ecuația $f'(x) = 0$, pentru funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2lnx$.

$x = 1 \in (0, \infty)$

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$. Arătați că $f''(x)>0\,,\forall x\in\mathbb{R}$.

$$f''(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0\,,\forall x\in\mathbb{R}$$

9. Aflați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+2\,,x\leq 1\\ lnx\qquad\qquad ,x>1\end{cases}$

să fie continuă în 1 .

$$a,b\in\mathbb{R}\ \to (a,b)=(a,-a-2)$$

10. Demonstrați că $f'(x)=1\,,\forall x<1, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1},\quad x<1\\ e^{x-1}+x+1, x\geq 1\end{cases}$

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

11. Rezolvați inecuația $f'(x)\geq 0$, unde $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}\,,f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

$$f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}\geq 0\ \ \to\ \ x-2\geq 0\ \ \to\ \ ...$$

12. Determinați mulțimea soluțiilor inecuației $f''(x)>0$, unde $f:\mathbb{R}\backslash\{-1\}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\dfrac{4x+3}{x+1}$.

$$f''(x)=\frac{-2(x+1)}{(x+1)^4}>0\ \ \to\ \ -2(x+1)>0\ \ \to\ \ ...$$