Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Funcţii injective, surjective, bijective - aplicaţii

1.Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ este injectivă.

Fie $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, atunci $3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$, rezultă $x_1 = x_2$ și f este injectivă.

2.Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ este surjectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$, atunci ecuația $f(x) = y$, $3x + 1 = y$ are cel puțin o soluție în $\mathbb{R}$,

$3x + 1 = y \in \mathbb{R} \rightarrow 3x = y - 1 \in \mathbb{R} \rightarrow x = \dfrac{y-1}{3} \in \mathbb{R}$ și f este surjectivă.

3.Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 2x$ este bijectivă.

(1)Fie $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, atunci $4 - 2x_1 = 4 - 2x_2$, rezultă $x_1 = x_2$ și f este injectivă.

(2)Fie $y \in \mathbb{R}$, atunci ecuația $f(x) = y$, $4 - 2x = y$ are cel puțin o soluție în $\mathbb{R}$,

$4 - 2x = y \in \mathbb{R} \rightarrow -2x = y - 4 \in \mathbb{R} \rightarrow x = \dfrac{4-y}{2} \in \mathbb{R}$ și f este surjectivă.

Din (1) și (2) funcția f este bijectivă.

4.Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 1$ nu este injectivă.

$\exists\, x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, pentru care $f(x_1) = f(x_2)$ și atunci f nu este injectivă.
De exemplu, $-1 \neq 1$, dar $f(-1) = f(1) = 2$ și atunci f nu este injectivă.

5.Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 1$ nu este surjectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$. Ecuația $f(x) = y$, $x^4 + 1 = y$ nu are soluții reale pentru $y < 1$.

De exemplu, pentru $y = 0 \in \mathbb{R}$, ecuația devine $x^4 + 1 = 0 \rightarrow x^4 = -1$ și nu are soluții reale, atunci f nu este surjectivă.

6.Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$ este injectivă.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$ este funcție de gradul întâi, strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, pentru că $a = -1 < 0$. Știind că, o funcție strict monotonă este întotdeauna funcție injectivă, deducem că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$ este injectivă.

7.Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ este injectivă.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$.

$x_1 \neq x_2 \ |\cdot 2 \ \to \ 2x_1 \neq 2x_2 \ |-1 \ \to \ 2x_1 - 1 \neq 2x_2 - 1 \ \to \ f(x_1) \neq f(x_2) \ \to \ f$ injectivă

8.Arătați că funcția $f:[0,\infty)\to[1,\infty)$, $f(x)=8x+1$ este surjectivă.

Fie $y \in [1,\infty)$ și rezolvăm ecuația $f(x)=y$.

$8x+1=y\in[1,\infty) \ |-1 \ \to \ 8x=y-1\in[0,\infty) \ \to \ \exists\, x=\dfrac{y-1}{8}\in[0,\infty) \ \to \ f$ surjectivă

9.Arătați că funcția $f:[0,\infty)\to[1,\infty)$, $f(x)=x^4+1$ este bijectivă.

f bijectivă $\leftrightarrow \forall\, y\in[1,\infty)\ \exists!\ x\in[0,\infty)$ astfel încât $f(x)=y$

Fie $y\in[1,\infty)$, atunci din $f(x)=y$ avem $x^4+1=y\in[1,\infty)$, scădem 1 $\to$

$x^4=y-1\in[0,\infty) \ \to \ \exists!\ x=\sqrt[4]{y-1}\in[0,\infty) \ \to \ f$ bijectivă.

10.Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-a, x\le 1 \\ ax-5, x>1 \end{cases}$. Determinați parametrul real a astfel încât:

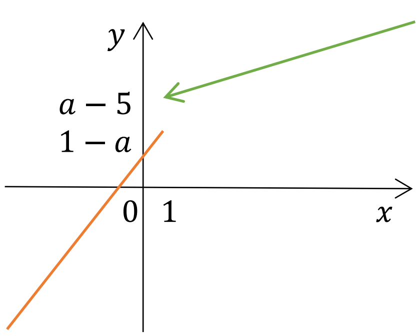
i)funcția să fie injectivă,

ii)funcția să fie surjectivă.

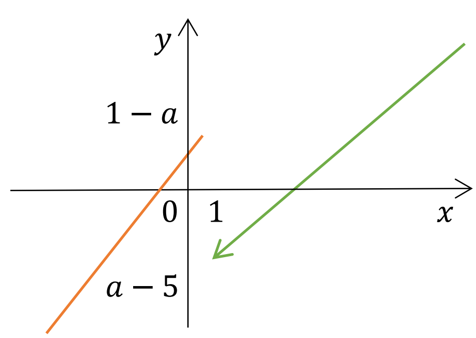
i)funcția $f(x)=x-a$ este strict crescătoare și pentru ca funcția dată să fie injectivă,

atunci funcția $f(x)=ax-5$ este strict crescătoare cu $a>0$, respectiv:

$f_s(1)=f(1)\le f_d(1)\to 1-a\le a-5\to a\ge 3$ și $a>0 \ \to \ a\in[3,\infty)$



i)Funcţie injectivă



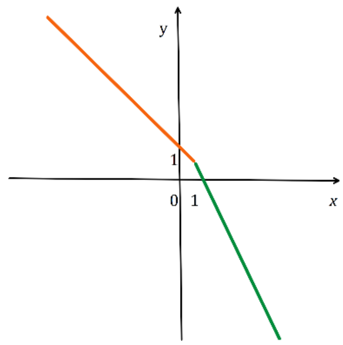
ii)Funcţie surjectivă

ii)funcția $f(x) = x - a$ este strict crescătoare și pentru ca funcția dată să fie surjectivă,

atunci funcția $f(x) = ax - 5$ este strict crescătoare cu $a > 0$, respectiv:

$f_s(1) = f(1) \geq f_d(1) \rightarrow 1 - a \geq a - 5 \rightarrow a \leq 3$ și $a > 0 \rightarrow a \in (0,3]$

11.Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2 - x & , x \leq 1 \\ 3 - 2x & , x > 1 \end{cases}$ este bijectivă.



12.Arătați că funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ nu este bijectivă.

Surse

https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_iniettiva
https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_suriettiva
https://it.wikipedia.org/wiki/Corrispondenza_biunivoca
https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_monotona