Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Matrice. Determinanţi. Sisteme – 4

1. Fie sistemul $\begin{cases} x + ay = 0 \\ y + az = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ și A matricea sa. Determinați inversa matricei A.

$detA = 1 + a^2 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \exists\, A^{-1} = \ \ldots$

2. Dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică ecuația $AX = XA$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, atunci

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Considerăm matricea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \ldots$

3. Rezolvați sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R} - \{1\}$.

$Caz\ I.\ a \in \mathbb{R} - \{1, -2\} \ \rightarrow$ sistem compatibil determinat ...

$Caz\ II.\ a = -2 \quad \rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat ...

4. Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + y + z = m - 1 \\ x + my + 2z = -1 \end{cases}$ are soluția $(x_0, y_0, 2)$.

$z = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ mx + y + 2 = m - 1 \\ x + my + 4 = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \ldots$

5. Aflați rangul matricei $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$1 \neq 0 \rightarrow rangM \geq 1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow rangM \geq 2$

$detM = 0 \ \rightarrow \ rangM = 2$

6. Determinați $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ știind că sistemul $\begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = \alpha^3 \\ x + \beta y + \beta^2 z = \beta^3 \\ x + \gamma y + \gamma^2 z = \gamma^3 \end{cases}$ are soluția $(-1, 1, 1)$.

$\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \ \rightarrow \ \alpha = \pm 1 \in \mathbb{R}$

7. Aflați rangul matricei $B = \begin{pmatrix} 1 & b & 3 \\ b & 3 & 1 \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

$Caz\ I.\ \ b \in \mathbb{R} - \{-4\} \ \rightarrow \ ...$

$Caz\ II. b = -4 \quad \rightarrow \ ...$

8. Determinați inversa matricei $C = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$.

$c \in \mathbb{R}^* \ \rightarrow \ \exists\ C^{-1} = \dfrac{1}{detC} C^* \ \rightarrow \ ...$

9. Rezolvați sistemul $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ x + y + z = 0 \\ bcx + cay + abz = 0 \end{cases}$, $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, $a \neq b \neq c \neq a$.

Fie A matricea atașată sistemului și $detA = (c - a)(c - b)(a - b) \neq 0$, atunci ...