Profesor Blaga Mirela-Gabriela

VECTORI ÎN PLAN – 2 –

Coliniaritate. Paralelism

Doi vectori care au aceeași direcție se numesc coliniari.

Fiecare din proprietățile $1 - 10$ reprezintă o modalitate de studiu a coliniarității vectorilor.

P1.Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

Fie A și B puncte distincte în planul $\mathcal{P}$, iar M un punct arbitrar din plan.

P2.Punctele A, B și M sunt coliniare dacă $\exists\, x \in \mathbb{R}$ a. î. $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$.

P3.Punctele A, B și M sunt coliniare dacă $\exists\, x \in \mathbb{R}$ a. î. $\forall P \in \mathcal{P}$ avem $\overrightarrow{PM} = (1-x)\overrightarrow{PA} + x\overrightarrow{PB}$.

P4.Punctele A, B și M sunt coliniare dacă $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ cu $x + y = 1$ a. î. $\forall P \in \mathcal{P}$ avem

$\overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$.

P5.Punctele A, B și M sunt coliniare dacă $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ cu $x + y \neq 0$ a. î. $\forall P \in \mathcal{P}$ avem

$(x + y)\,\overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$.

P6.Punctele A, B și M sunt coliniare dacă $\exists\, x, y, z \in \mathbb{R}$ cu $x + y + z = 0, z \neq 0$ a. î. $\forall P \in \mathcal{P}$ avem

$x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PM} = \vec{0}$.

P7.Punctele A, B și M sunt coliniare dacă $\exists\, x, y \in \mathbb{R}$ cu $x + y \neq 0$ a. î. $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

P8.Punctele M, B și C sunt coliniare dacă $\exists \mathrm{k} \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ a. î. $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{\mathrm{k}+1}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}+1}\overrightarrow{AC}$, $\forall A \in \mathcal{P}$.

P9.**Teorema lui Menelaus**. Fie triunghiul ABC și punctele $D \in BC, E \in CA, F \in AB$.

Punctele D, E, F sunt coliniare $\Leftrightarrow \dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$.

P10.**Teorema lui Thales.** O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte laturi sau pe prelungirile lor segmente proporționale.

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Exerciţii

1)Fie triunghiul ABC și $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}$. Arătați că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

Rezolvare

Scriem vectorul $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BC}$ și din P1. $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

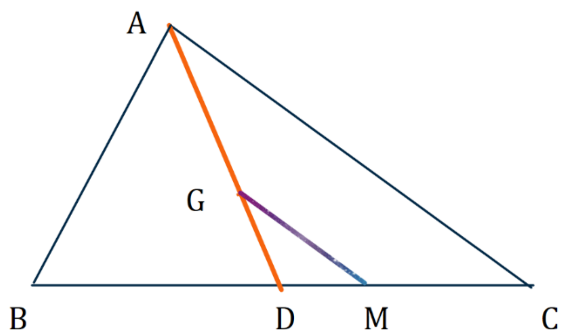
2)Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate și punctul M definit prin $\overrightarrow{MB}=-2\cdot\overrightarrow{MC}$.

Arătați că dreptele GM și AC sunt paralele.

Rezolvare

Vectorial

În triunghiul ABC ducem mediana AD și construim punctul G la $\frac{2}{3}$ din mediană față de vârf și la $\frac{1}{3}$ din mediană față de bază.



În triunghiul GDM avem $\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, de unde $GM \parallel AC$.

Sau utilizăm în rezolvare

Reciproca Teoremei lui Thales. Dacă o dreaptă determină pe două din laturile unui triunghi sau pe prelungirile acestora, segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu cea de a treia latură a triunghiului.

Avem $\frac{AG}{GD} = 2$ (1).

Din $\overrightarrow{MB} = -2 \cdot \overrightarrow{MC}$ deducem că $\overrightarrow{BM} = 2 \cdot \overrightarrow{MC}$ și $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$,

iar $\overrightarrow{DM} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, de unde $\frac{CM}{MD} = 2$ (2).

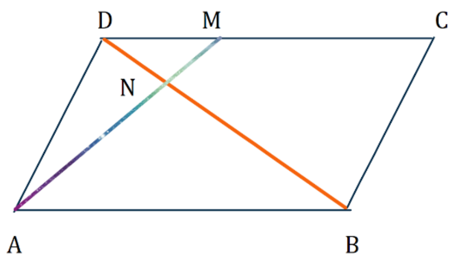
Din (1) și (2) în triunghiul ADC avem $\frac{AG}{GD} = \frac{CM}{MD}$ și conform Reciprocei Teoremei lui Thales

dreptele AC și GM sunt paralele.

3)Fie paralelogramul $ABCD$ și $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.

Determinați numărul real α pentru care $\overrightarrow{AN} = \alpha \cdot \overrightarrow{AM}$.

Rezolvare



Avem $\frac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NB}} = \frac{1}{3}$ și în triunghiul ADB scriem $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{\frac{1}{3}+1}\overrightarrow{AD} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AN} = \frac{3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}}{4}$ (1).

În triunghiul ADM scriem $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}}{3}$ (2).

Din (1) și (2) obținem $\overrightarrow{AN} = \frac{3\overrightarrow{AM}}{4}$ și $\alpha = \frac{3}{4} \in \mathbb{R}$.