Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Morfism şi izomorfism de grupuri

morfism — Fie $(G_1,*)$ și $(G_2,\circ)$ două grupuri.

Funcția $f: G_1 \to G_2$ cu proprietatea $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y \in G_1$ se numește morfism de grupuri.

izomorfism — Funcția $f: G_1 \to G_2$ cu proprietățile $\begin{cases} f \text{ morfism de grupuri} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$ se numește izomorfism de grupuri.

$(G_1,*) \simeq (G_2,\circ)$ notație pentru grupuri izomorfe

EndG — Dacă $f: G \to G$ morfism atunci f se numește endomorfism al grupului G.

AutG — Dacă $f: G \to G$ izomorfism atunci f se numește automorfism al grupului G.

proprietate — f morfism de grupuri dacă $f: G_1 \to G_2$ $\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(x') = \left(f(x)\right)', x \in G_1 \\ f(x^n) = \left(f(x)\right)^n, x \in G_1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Morfism şi izomorfism de inele

morfism — Fie $(A_1, +,\cdot)$ și $(A_2,*,\circ)$ două inele.

Funcția $f: A_1 \to A_2$ cu proprietățile $\begin{cases} f(x + y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in A_1 \\ f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in A_1 \end{cases}$

se numește morfism de inele.

izomorfism — Dacă funcția $f: A_1 \to A_2$ verifică $\begin{cases} f \text{ morfism de inele} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$ atunci f se numește izomorfism de inele.

$(A_1, +,\cdot) \simeq (A_2,*,\circ)$ notație pentru inele izomorfe

Morfism şi izomorfism de corpuri

morfism — Fie $(K_1, +,\cdot)$ și $(K_2,*,\circ)$ două corpuri.

Funcția $f: K_1 \to K_2$ cu proprietățile $\begin{cases} f(x + y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in K_1 \\ f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in K_1 \end{cases}$

se numește morfism de corpuri.

izomorfism — Dacă funcția $f: K_1 \to K_2$ verifică $\begin{cases} f \text{ morfism de corpuri} \\ f \text{ funcție bijectivă} \end{cases}$ atunci f se numește izomorfism de corpuri.

$(K_1, +,\cdot) \simeq (K_2,*,\circ)$ notație pentru corpuri izomorfe

Exemplu

Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^x$ este izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $((0, \infty), *)$, unde $x * y = x \cdot y$.

Rezolvare

(1) $f(x+y) = f(x) * f(y) \leftrightarrow e^{x+y} = e^x * e^y \leftrightarrow e^{x+y} = e^x \cdot e^y \leftrightarrow e^{x+y} = e^{x+y}\ (A) \leftrightarrow$ f morfism de grupuri

(2) $\left.\begin{array}{l} f'(x) = e^x > 0 \to f \text{ crescătoare } \to f \text{ injectivă} \\ f \text{ continuă și } f(\mathbb{R}) = (0, \infty) \to f \text{ surjectivă} \end{array}\right\} \to f$ bijectivă

sau spunem că funcția f este bijectivă prin construcție.

Din (1) și (2) obținem că funcția f este izomorfism de grupuri.

Aplicaţii

1. Fie mulțimea $G = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătați că funcția $f: \mathbb{Z} \to G$, $f(x) = A_x$ este morfism între grupul aditiv $(\mathbb{Z}, +)$ și grupul multiplicativ $(G, \cdot)$.
2. Pe mulțimea $G = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se definește legea $x * y = arctg(tg\, x + tg\, y),\ \forall x, y \in G$.

   a)Arătați că $(G,*)$ este grup.

   b)Demonstrați că $(G,*) \simeq (\mathbb{R}, +)$.
3. Arătați că $(G,\cdot)$ este un grup izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}),\cdot)$, unde $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 3y^2 \neq 0 \right\}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{ x + y\sqrt{3}\, | x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 3y^2 \neq 0\}$.
4. Demonstrați că $f: (0,1) \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este izomorfism între grupul $(G,*)$, unde $G = (0,1)$, $x * y = \dfrac{xy}{1 - x - y + 2xy}$ și grupul multiplicativ $((0, \infty),\cdot)$.

Sursa https://en.wikipedia.org/wiki/Group_homomorphism