

### Asimptote

1. Determinați ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f: (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 4}{x^2 - 4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 4}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \in \mathbb{R}$$

Ecuația asimptotei orizontale spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$  este  $y = 1$ .

2. Determinați ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f: (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \rightarrow \nexists \text{ asimptotă orizontală spre } +\infty \text{ la graficul funcției } f$$

Studiem existența asimptotei oblice de ecuație  $y = mx + n$ , unde

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^* \text{ și } n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}.$$

$m = 1$  și  $n = 3$ , iar ecuația asimptotei oblice este  $y = x + 3$ .

3. Determinați asimptotele funcției  $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ .

$$\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \rightarrow \text{ecuația asimptotei orizontale este } y = 0$$

Avem asimptotă orizontală spre  $\pm \infty$ , înseamnă că nu avem asimptotă oblică.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty \rightarrow \text{ecuația asimptotei verticale este } x = -2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty, \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty \rightarrow \text{ecuația asimptotei verticale este } x = 2$$

4. Aflați numărul asimptotelor funcției  $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}. \text{ Justificați răspunsul.}$$

$y = 0$  este ecuația asimptotei orizontale spre  $\pm \infty$  la graficul funcției  $f$ .

$x = -2, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$  sunt ecuațiile asimptotelor verticale.

În concluzie, numărul asimptotelor este 6.

5. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Determinați  $a$  și  $b$

astfel încât  $y = x + 1$  să fie ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

$$y = x + 1 \rightarrow m = 1 \text{ și } n = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \rightarrow a = 1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 1 \rightarrow b = 0 \in \mathbb{R}$$

Determinați asimptotele funcțiilor:

6.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^x$
7.  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$
8.  $f: (-\infty, 0] \cup [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - x}$
9.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arctg x$
10.  $f: (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \frac{x-1}{x}$