Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Determinarea unor funcții continue pornind de la proprietăți date

1. Determinați funcțiile continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(2x) = f(x)$.

Din $f(2x) = f(x)$ prin înlocuirea lui x cu $\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \dots, \frac{x}{2^n}$ obținem

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^2}\right)$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Adunând, obținem $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0) = a =$ constantă

2. Determinați funcțiile continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x) = f\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 2}\right)$.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci $f(x_0) = f\left(\sqrt[3]{{x_0}^2 + x_0 + 2}\right) = f(x_1) = \ \dots\ = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Asociem funcției f șirul $(x_n)_{n\geq 0}$, deducem $x_{n+1} = \sqrt[3]{{x_n}^2 + x_n + 2}$ și notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

$l = \sqrt[3]{l^2 + l + 2}$ obținem $l^3 - l^2 - l - 2 = 0$ și rezolvăm ecuația.
$(l^2 + l + 1)(l - 2) = 0$ obținem $l = 2 \ \to\ f(x) =$ constantă

3. Determinați funcțiile continue $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x + y) = f(x) + f(y) + ax + ay$.

$x = y = 0 \qquad f(0) = f(0) + f(0) \qquad \to \quad f(0) = 0$
$x = 1 \ \ y = 0 \qquad f(1) = f(1) + f(0) + a \qquad \to \quad a = 0$
$x = y = 1 \qquad f(2) = f(1) + f(1) \qquad \to \quad f(2) = 2f(1)$
Prin inducție demonstrăm că $f(n) = nf(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$.

Apoi arătăm că $f\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(n\frac{1}{m}\right) = nf\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{m}f(1)$, $\forall \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.

Obținem $f(x) = xf(1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $f(1) \in \mathbb{R}$.
Verificăm continuitatea în 0.

4. Studiți continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2 + 2^{2nx}}{x^2 + xe^{nx} + e^{2nx}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} 2^{2nx} \\ \lim\limits_{n\to\infty} e^{nx} \\ \lim\limits_{n\to\infty} e^{2nx} \end{array}\right\} = \begin{cases} \infty \ , 2, e > 1 \ , x > 0 \\ 1 \ , 2, e > 1 \ , x = 0 \\ 0 \ , 2, e > 1 \ , x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{2nx}}{e^{2nx}} & , x > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1} & , x = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2}{x^2} & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^{2nx} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \\ 1 & , x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \ , x > 0 \\ 1 \ , x = 0 \\ 1 \ , x < 0 \end{cases}$$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , f(x) = \begin{cases} 0 \ , x > 0 \\ 1 \ , x = 0 \\ 1 \ , x < 0 \end{cases}$$

f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$, dar nu e continuă în 0.