Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL I

1. Arătați că $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ este număr întreg.
2. Determinați inversa funcției bijective $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\sqrt[3]{x+1}$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_{\frac{1}{2}}x>2$.
4. Aflați termenul care îl conține pe x din dezvoltarea $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{16}$.
5. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,2)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $x-2y+3=0$.
6. Aflați măsura unghiului dintre vectorii $\vec{u}=2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}$ și $\vec{v}=6\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$.

Rezolvare

1. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-2=-3\in\mathbb{Z}$

2. $f:A\to B\,,f(x)=y$ este funcție bijectivă, admite inversă și inversa ei este funcția $f^{-1}:B\to A\,,x=f^{-1}(y)$.

Din datele problemei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ este funcție bijectivă.

$\forall y\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y$

$\sqrt[3]{x+1}=y\in\mathbb{R}$

$x+1=y^3\in\mathbb{R}$

$x=y^3-1\in\mathbb{R}$

și obținem inversa funcției f, $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f^{-1}(x)=x^3-1$.

3. Inecuația $\log_{\frac{1}{2}}x>2$ există dacă $x>0$.

Rezolvăm inecuația dată și obținem $x<\left(\frac{1}{2}\right)^2$, de unde $x<\frac{1}{4}$.

Mulțimea soluțiilor este intervalul $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

4. În dezvoltarea $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{16}$, identificăm $a=x\,,b=\frac{1}{x^2}$ și $n=16$.

Formula termenului general din binomul lui Newton $(a+b)^n$ este

$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, de unde avem $T_{k+1} = C_{16}^k \cdot x^{16-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k$, obținem $T_{k+1} = C_{16}^k \cdot x^{16-3k}$ și egalăm x^{16-3k} cu x (din problemă), apoi rezolvăm ecuația $16 - 3k = 1$. Obținem $k = 5 \in \mathbb{N}$, unde $k \leq 16$, iar termenul care îl conține pe x este $T_6 = C_{16}^5 x$.

5. Ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,2)$ este $y - y_A = m(x - x_A)$.
Panta dreptei care trece prin A este m și este egală cu panta dreptei de ecuație $x - 2y + 3 = 0$, deoarece cele două drepte sunt paralele. $m = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$
Înlocuim în ecuație coordonatele punctului A și panta m : $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$, obținem ecuația $x - 2y + 1 = 0$.

6. $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = 6\vec{i} + 4\vec{j} \rightarrow 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 = 0 \rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \alpha = 90°$