Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie mulțimea $M = \left\{A(x) = I_2 + xA\,, A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) \in M$.

b) Determinați inversa matricei $A(5)$.

c) Aflați x din ecuația $A(x) = A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot \ldots \cdot A(10)$.

2. Fie polinomul $f = X^3 - 12X + m \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .

a) Determinați parametrul real m astfel încât f să fie divizibil cu $X + 1$.

b) Rezolvați ecuația $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = 6$.

c) Aflați m astfel încât f să admită trei rădăcini reale distincte.

Rezolvare

1. a) $A(x) \cdot A(y) = (I_2 + xA)(I_2 + yA) = I_2 + (x + y)A + xyA^2 = A(x + y) \in M$, $x, y \in \mathbb{R} \ \rightarrow \ x + y \in \mathbb{R}$

1. b) $I_2 = \mathrm{A}(0) \in M$, $0 \in \mathbb{R}$. Deoarece $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$, pentru a determina inversa matricei $A(5)$ procedăm astfel:

$A(x) \cdot A(y) = I_2 \ \rightarrow \ A(x) \cdot A(y) = A(0) \ \rightarrow \ A(x + y) = A(0) \ \rightarrow x + y = 0$

Pentru $x = 5$, avem $5 + y = 0 \rightarrow y = -5 \in \mathbb{R}$ și inversa matricei $A(5)$ este matricea $A(y) = A(-5) \in M$.

1. c) Înmulțirea matricelor este asociativă, iar din punctul a) avem $A(x) \cdot A(y) = A(x + y)$, obținem $A(x) = A(1 + 2 + 3 + \ \ldots \ + 10)$, de unde $x = 55 \in \mathbb{R}$.

2. a) f este divizibil cu $X + 1$, dacă $f(-1) = 0$, de unde obținem $m = -11 \in \mathbb{R}$.

2. b) Polinomul $f = X^3 - 12X + m$ are coeficienții $a = 1, b = 0, c = -12$ și $d = m$.

$$S_2 = x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = \frac{c}{a} \ \rightarrow \ S_2 = -12$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \ \rightarrow \ S_3 = -m$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 6 \ \rightarrow \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = 6 \ \rightarrow \ \frac{S_2}{S_3} = 6 \ \rightarrow$$

$$\frac{-12}{-m} = 6 \ \rightarrow \ m = 2 \in \mathbb{R}$$

2\. c) Atașăm funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=x^3-12x+m\,.$

$f'(x)=3x^2-12$

$f'(x)=0\to x=\pm2\in\mathbb{R}$

Realizăm tabelul de variație al funcției f.

x	$-\infty$				-2				2				∞
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$m+16$		$\searrow$		$m-16$		$\nearrow$		∞
	$-$				$+$				$-$				$+$

f admite trei rădăcini reale distincte, dacă

$m+16>0$ și $m-16<0$, obținem $m\in(-16,16)$.