

**SUBIECTUL al II-lea**

1. Fie determinantul  $D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}, x \in \mathbb{R}$ .
- a) Arătați că  $D(-2) = 0$ .
- b) Rezolvați inecuația  $D(x) \geq 0$ .
- c) Rezolvați ecuația  $D(2^x - 3) = 0$ .
2. Pe  $\mathbb{R}$  se consideră legile de compoziție  $x * y = x + y + 1$  și  $x \circ y = xy + x + y$ .
- a) Arătați că legea  $*$  este asociativă.
- b) Demonstrați că  $x \circ y \in (-1, \infty), \forall x, y \in (-1, \infty)$ .
- c) Determinați parametrul real  $a$  știind că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + 1$  este izomorfism între grupurile  $(\mathbb{R}, *)$  și  $(\mathbb{R}, +)$ .

*Rezolvare*

1. a)  $D(-2) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

1. b)  $D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \stackrel{C_1+C_2+C_3}{=} (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2$

$(x+2)(x-1)^2 \geq 0 \rightarrow (x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  și  $x+2 \geq 0 \rightarrow x \in [-2, \infty)$

1. c) Din punctul b) avem  $D(x) = (x+2)(x-1)^2$ , atunci

$D(2^x - 3) = (2^x - 3 + 2)(2^x - 3 - 1)^2 = (2^x - 1)(2^x - 4)^2$

$D(2^x - 3) = 0 \rightarrow 2^x - 1 = 0 \rightarrow x = 0 \in \mathbb{R}$ , respectiv  $2^x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \in \mathbb{R}$   
 $x \in \{0, 2\}$

2. a)  $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$x + y + z + 2 = x + y + z + 2$  adevărat  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

2. b)  $x, y \in (-1, \infty) \rightarrow x + 1 > 0, y + 1 > 0 \rightarrow (x + 1)(y + 1) > 0 \rightarrow$

$xy + x + y > -1 \rightarrow x \circ y \in (-1, \infty)$

2. c)  $\left. \begin{array}{l} e_1 = -1 \text{ este element neutru pentru } * \\ e_2 = 0 \text{ este element neutru pentru } + \end{array} \right\} \rightarrow f(e_1) = e_2 \rightarrow f(-1) = 0 \rightarrow a = 1 \in \mathbb{R}$