Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

a) Scrieți ecuția tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1.

b) Arătați că funcția f este convexă pe $(-1,\infty)$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x$.

2. Considerăm funcția $f:\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

a) Calculați $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$.

b) Calculați $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^2(x)dx$.

c) Determinați primitiva funcției f cu proprietatea $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{12}$.

Rezolvare

1. a) $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)\ \to\ x-2y+1=0$$

1. b) $f''(x)=\dfrac{4}{(x+1)^3}>0, x\in(-1,\infty)\ \to f$ convexă pe $(-1,\infty)$

1. c) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+x}\right)^x=1^\infty=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1-x}{x^2+x}\right)^{\frac{x^2+x}{1-x}}\right]^{\frac{1-x}{x^2+x}\cdot x}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

2. a) notăm $\sqrt{1-x^2}=t$

ridicăm la puterea a doua $1-x^2=t^2$

derivăm $-2xdx = 2tdt \rightarrow xdx = -tdt$

schimbăm intervalul $x = 0 \rightarrow t = 1$ și $x = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-x^2}dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^2\,dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

2. b) $$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^2(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-x^2)dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{12}$$

2. c) $F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + arcsinx\right) + c$ și $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{12} \rightarrow c = -\frac{\sqrt{3}}{8}$

$F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + arcsinx\right) - \frac{\sqrt{3}}{8}$, $F: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$