Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=xe^x-e^x$.

a) Studiați monotonia funcției f.

b) Arătați că f, f', f'' sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

c) Demonstrați că $-1\le f(x)<0\,,x\in(-\infty,0]$.

2. Definim funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,f(x)=\begin{cases} x\ln x, x>0\\ x^2, \quad x\le 0\end{cases}$.

a) Arătați că funcția f admite primitive.

b) Calculați $\int_{-1}^{0} f^2(x)dx$.

c) Aflați primitivele funcției f.

Rezolvare

1. a) $f'(x)=xe^x \;\rightarrow\; f'(x)=0\,,e^x>0 \;\rightarrow\; x=0\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$			0			∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$		-1		$\nearrow$	∞

Funcția f este descrescătoare când $x\in(-\infty,0]$ și f este crescătoare când $x\in[0,\infty)$.

1. b) $f'(x)=\dfrac{f(x)+f''(x)}{2} \;\rightarrow\; xe^x=\dfrac{xe^x-e^x+e^x+xe^x}{2} \;\rightarrow\; xe^x=xe^x\,,\forall x\in\mathbb{R}$

1. c) Din a), folosind tabelul de variație al funcției f deducem că

$-1\le f(x)<0\,,x\in(-\infty,0]$.

2. a) $\left.\begin{array}{l} x\in(0,\infty)\; f \text{ este produs de funcții elementare, deci continuă}\\ x\in(-\infty,0]\; f \text{ este funcție elementară, deci continuă}\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x^2=f(0)\rightarrow f \text{ continuă în } 0\end{array}\right\}\rightarrow$

f continuă pe $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ f admite primitive pe $\mathbb{R}$

2. b) $\int_{-1}^{0} f^2(x)dx=\int_{-1}^{0} x^4dx=\dfrac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{0}=\dfrac{1}{5}$

2. c) $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}lnx-\frac{x^2}{4}+c_1, x>0\\ \frac{x^3}{3}+c_2 \quad, x\le 0\end{cases}$ $\to \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)\to c_1=c_2$

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}lnx-\frac{x^2}{4}+c, x>0\\ \frac{x^3}{3}+c \quad, x\le 0\end{cases}$