

SUBIECTUL al II-lea

1. În planul xOy se consideră punctele $A_n(n, (n - 2)^2)$, $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Aflați ecuația dreptei A_1A_3 .
 - b) Calculați aria triunghiului $A_1A_3A_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.
 - c) Arătați că unghiul $\widehat{A_1A_3A_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ este obtuz.
2. Considerăm funcția $f: \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$, $f(x) = x^2 + \hat{2}x + \hat{3}$.
 - a) Calculați $f(\hat{1}) + f(\hat{2})$.
 - b) Arătați că funcția f nu este surjectivă.
 - c) Determinați mulțimea $A = \{x^{2025} \mid x \in \mathbb{Z}_4\}$.

Rezolvare

1. a) $A_1A_3: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A_1A_3: y - 1 = 0$

1. b) $A_{A_1A_3A_n} = \frac{|\Delta|}{2}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ n & (n-2)^2 & 1 \end{vmatrix} = 2(n^2 - 4n + 3)$

$A_{A_1A_3A_n} = |n^2 - 4n + 3|$

1. c) $\overrightarrow{A_3A_1} \cdot \overrightarrow{A_3A_n} = (x_1 - x_3)(x_n - x_3) + (y_1 - y_3)(y_n - y_3)$

$\overrightarrow{A_3A_1} \cdot \overrightarrow{A_3A_n} = -2(n - 3) < 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \rightarrow$ unghiul $\widehat{A_1A_3A_n}$ este obtuz.

2. a) $f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{3} = \hat{1}$

2. b) $f(\hat{0}) = \hat{3}$

$f(\hat{1}) = \hat{2}$

$f(\hat{2}) = \hat{3}$

$f(\hat{3}) = \hat{2}$

$f(\mathbb{Z}_4) = \{\hat{2}, \hat{3}\} \neq \mathbb{Z}_4 \rightarrow f$ nu este surjectivă

2. c) $\hat{0}^{2025} = \hat{0}, \hat{1}^{2025} = \hat{1}, \hat{2}^{2025} = \hat{0}, \hat{3}^{2025} = \hat{3} \rightarrow A = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}\}$