Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL I

1. Determinați modulul numărului complex z care verifică ecuația $2z-\bar{z}=3(1-i)$, unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.
2. Aflați numărul real a știind că punctul $A(-1,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+3$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{12-x}=x$.
4. Câte funcții injective $f:\{1,2\}\to\{3,4,5\}$ există?
5. Arătați că, în triunghiul ABC, MN și BC sunt paralele, știind că $\overrightarrow{AM}=5\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AN}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.
6. Aflați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC, unde $A(2,3)$, $B(-2,-3)$ și $C(2,-3)$.

Rezolvare

1. $2z-\bar{z}=2(x+iy)-(x-iy)=x+3yi\,, x,y\in\mathbb{R} \;\to\; x+3yi=3(1-i) \;\to$
$x=3$ și $y=-1 \;\to\; z=3-i\in\mathbb{C} \;\to\; |z|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$
2. $A(-1,2)\in G_f \;\to\; f(-1)=2 \;\to\; -a+3=2 \;\to\; a=1\in\mathbb{R}$
3. $\sqrt{12-x}$ există dacă $12-x\geq 0 \;\to\; x\leq 12$, ecuația are sens dacă $x\geq 0 \;\to\; x\in[0,12]$
Rezolvăm ecuația $\sqrt{12-x}=x$, prin ridicare la puterea a doua obținem
$12-x=x^2 \;\to\; x^2+x-12=0 \;\to\; x=3\in[0,12]$ și $x=-4\notin[0,12]$
4. $A_3^2=\dfrac{3!}{(3-2)!}=6$
5. Din reciproca Teoremei lui Thales avem $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC} \;\to\; MN\parallel BC$.
6. $A(2,3), B(-2,-3), C(2,-3) \;\to\; AC: x=2\parallel Oy$ și $BC: y=-3\parallel Ox \;\to AC\perp BC \;\to$
$\Delta\, ABC$ este dreptunghic în C, iar centrul cercului circumscris triunghiului este situat la mijlocul ipotenuzei AB $\to x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}\,, y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2} \to x_M=0\,, y_M=0$
$(0,0)$ sunt coordonatele centrului cercului circumscris $\Delta\, ABC \;\to\; O(0,0)$