Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+4y+mz=3 \\ 4x+16y+m^2z=9 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$ și A_m matricea asociată sistemului.

a) Calculați $det(A_3)$.

b) Determinați m pentru care sistemul este compatibil determinat.

c) Aflați m, știind că soluția sistemului (x_0, y_0, z_0) verifică relația $x_0 + y_0 + 4z_0 \leq 0$.

2. Considerăm mulțimea $M = \left\{A(x) = \begin{pmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că matricea $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M$.

b) Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că $A(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

c) Arătați că mulțimea M în raport cu înmulțirea matricelor formează grup abelian.

Rezolvare

1. a) $det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 16 & 9 \end{vmatrix} = (4-2)(3-2)(3-4) = -2$

1. b) $det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & m \\ 2^2 & 4^2 & m^2 \end{vmatrix} = (4-2)(m-2)(m-4) = 2(m-2)(m-4)$

Sistemul este compatibil determinat dacă $det(A_m) \neq 0 \rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{2,4\}$.

1. c) (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului, atunci:

Cazul 1. $m \in \mathbb{R} \setminus \{2,4\} \rightarrow$ sistemul are o singură soluție $\rightarrow x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$

$\Delta = det(A_m) = 2(m-2)(m-4)$

$\Delta x = (m-3)(m-4), \Delta y = (m-2)(m-3), \Delta z = -2 \rightarrow$

$(x,y,z) = \left(\frac{(m-3)(m-4)}{2(m-2)(m-4)}, \frac{(m-2)(m-3)}{2(m-2)(m-4)}, \frac{-2}{2(m-2)(m-4)}\right) = (x_0, y_0, z_0)$

Soluția verifică relația dată $x_0 + y_0 + 4z_0 \leq 0 \rightarrow \frac{(m-1)(m-5)}{(m-2)(m-4)} \leq 0 \rightarrow$

$m \in [1,2) \cup (4,5]$.

Cazul 2. $m = 2 \ \rightarrow$ sistem incompatibil

Cazul 3. $m = 4 \ \rightarrow$ sistem incompatibil

2. a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A\left(\frac{\pi}{3}\right) \in M, \frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$

2. b) $sinx, cosx \in \{0, \pm 1\} \ \rightarrow \ x = \frac{k\pi}{2} \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

2. c) $A(x)A(y) = A(x+y) \in M, x, y \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, +)$ grup abelian
Înmulţirea matricelor este asociativă.
$A(x)A(y) = A(y)A(x)$, $x, y \in \mathbb{R}$
$A(0) \in M, 0 \in \mathbb{R}$
$A(-x) \in M, -x \in \mathbb{R}$

$(M,\cdot)$ formează grup abelian.