Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL al III-lea

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}\,, f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$.

a) Aflați derivata funcției f.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Studiați monotonia funcției f.

2. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^3+1}dx\,, n \geq 1$.

a) Calculați I_2 .

b) Studiați monotonia șirului $(I_n)_{n\geq 1}$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\,I_n$.

Rezolvare

1. a) $$f'(x) = \frac{(x^2+x+1)'\cdot x - (x^2+x+1)\cdot x'}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

1. b) $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty \;\to$$

$\nexists$ asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Verificăm existența asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f:

$$y = mx+n\,, m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1 \in \mathbb{R}^* \text{ și}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = 1 \in \mathbb{R}$$

$y = x+1$ este ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

1. c) $$f'(x) \geq 0 \;\leftrightarrow\; \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \;\leftrightarrow\; x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \text{ atunci}$$

f crescătoare pe $(-\infty,-1]$, f crescătoare pe $[1,\infty)$, respectiv
f descrescătoare pe $[-1,0)$, f descrescătoare pe $(0,1]$

2. a) $$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}ln(x^3+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}ln2$$

2. b) $x \in [0,1] \to x \leq 1 \to x^{n+1} \leq x^n \Big| \cdot \frac{1}{x^3+1} \to \frac{x^{n+1}}{x^3+1} \leq \frac{x^n}{x^3+1} \to I_{n+1} \leq I_n \to$ șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

2. c) $x \in [0,1] \to 0 \leq x \leq 1 \to 0 \leq x^3 \leq 1 \to 1 \leq x^3+1 \leq 2 \to 1 \geq \frac{1}{x^3+1} \geq \frac{1}{2} \to$

$\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x^3+1} \leq x^n \to \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \to \lim_{n\to\infty} I_n = 0 \to$ șir convergent

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Calculăm $I_{n+3} + I_n$, obținem $I_{n+3} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

Din punctul b), șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1} \leq \ \dots \ \leq I_1$.

$2I_{n+3} \leq I_{n+3} + I_n \leq 2I_n \quad \to \quad 2I_{n+3} \leq \frac{1}{n+1} \leq 2I_n \quad \to$

$\frac{1}{n+1} \leq 2I_n \leq \frac{1}{n-2} \quad \to \quad \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-2)} \quad \to$

$\frac{2n+1}{2(n+1)} \leq (2n+1)I_n \leq \frac{2n+1}{2(n-2)} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} (2n+1)\, I_n = 1$