

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Aplicații la legile de compoziție

$$x * y = xy - ax - ay + a^2 + a$$

$$x * y = xy + ax + ay + a^2 - a$$

Aplicația 1. Fie legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 3x - 3y + 12, x, y \in \mathbb{R}$. Calculați:

- a) $x * 3, \forall x \in \mathbb{R}$,
- b) $(-19) * (-18) * (-17) * \dots * 19$,
- c) $(-19) * (-18) * (-17) * \dots * 1$.

Rezolvare

a) $x * 3 = 3x - 3x - 9 + 12 = 3$

b) Avem o idee din punctul a). $x * 3 = 3$. Verificăm dacă $3 * x = 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Obținem că elementul absorbant este 3. Așadar utilizăm asociativitatea legii și avem

$$\begin{aligned} (-19) * (-18) * (-17) * \dots * 19 &= \underbrace{(-19) * (-18) * (-17) * \dots * 2}_x * 3 * \underbrace{4 * \dots * 19}_y = x * 3 * y = \\ &= (x * 3) * y = 3 * y = 3, \quad x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Expresia de calculat $(-19) * (-18) * (-17) * \dots * 1$ nu conține elementul absorbant.

Vom restrânge și vom utiliza asociativitatea legii de compoziție, astfel:

$$x * y = xy - 3x - 3y + 12 = (x - 3)(y - 3) + 3$$

$$x * y * z = (x - 3)(y - 3)(z - 3) + 3, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (-19) * (-18) * (-17) * \dots * 1 &= (-19 - 3)(-18 - 3)(-17 - 3) \dots (1 - 3) + 3 = \\ &= (-22)(-21)(-20) \dots (-2) + 3 = (-1)^{21} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 22 + 3 = 3 - 22! \end{aligned}$$

Aplicația 2. Fie legea de compoziție $x * y = xy + 3x + 3y + 6, x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Calculați $2 * (-3)$.
- b) Arătați că $x * y \in (-3, \infty), \forall x, y \in (-3, \infty)$.
- c) Rezolvați ecuația $x * x * x * x = x, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

a) $2 * (-3) = -6 + 6 - 9 + 6 = -3$

b) $x * y \in (-3, \infty) \Leftrightarrow x * y > -3 \Leftrightarrow x * y + 3 > 0 \Leftrightarrow xy + 3x + 3y + 9 > 0 \Leftrightarrow (x + 3)(y + 3) > 0 \quad (A) \quad \forall x, y \in (-3, \infty)$

c) Restrângem legea de compoziție $x * y = (x + 3)(y + 3) - 3$, arătăm asociativitatea și obținem

$$x * y * z = (x + 3)(y + 3)(z + 3) - 3, \text{ respectiv } x * x * x = (x + 3)^3 - 3. \text{ Atunci}$$

$$x * x * x * x = x, x \in \mathbb{R} \text{ se scrie } (x + 3)^4 - 3 = x \Leftrightarrow (x + 3)^4 - (x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 3)((x + 3)^3 - 1) = 0$$

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

I. $x + 3 = 0 \leftrightarrow x = -3 \in \mathbb{R}$

II. $(x + 3)^3 - 1 = 0 \leftrightarrow (x + 3)^3 = 1 \leftrightarrow x + 3 = 1 \leftrightarrow x = -2 \in \mathbb{R}$
 $x \in \{-3, -2\}$

Observație. Ecuația binomă $x^3 = a^3, a \in \mathbb{R}$ are o singură rădăcină reală $x = a$.

Aplicația 3. Fie legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $2 \circ 3 \circ 4 \circ \dots \circ 10$.

b) Rezolvați ecuația $x \circ x \circ x \circ x \circ x = 6, x \in \mathbb{R}$.

c) Rezolvați ecuația $x \circ x \circ x \circ x \circ x = x, x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

a) Restrângem legea $x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$ la $x \circ y = (x - 5)(y - 5) + 5$ și deducem că 5 este element absorbant. $x \circ 5 = 5 \circ x = 5, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$2 \circ 3 \circ 4 \circ \dots \circ 10 = \underbrace{2 \circ 3 \circ 4 \circ 5}_x \circ \underbrace{6 \circ \dots \circ 10}_y = x \circ 5 \circ y = (x \circ 5) \circ y = 5 \circ y = 5, x, y \in \mathbb{R}$$

b) Deoarece $x \circ y = (x - 5)(y - 5) + 5$, avem $x \circ x = (x - 5)^2 + 5$ și din asociativitate $x \circ x \circ x \circ x \circ x = (x - 5)^5 + 5$. Ecuația $x \circ x \circ x \circ x \circ x = 6$ se scrie $(x - 5)^5 + 5 = 6$. $(x - 5)^5 = 1$, de unde $x - 5 = 1$ și soluția ecuației este $x = 6 \in \mathbb{R}$.

c) Ecuația $x \circ x \circ x \circ x \circ x = x$ se scrie $(x - 5)^5 + 5 = x$ sau $(x - 5)^5 - (x - 5) = 0$.
 $(x - 5)((x - 5)^4 - 1) = 0$

I. $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \in \mathbb{R}$

II. $(x - 5)^4 - 1 = 0 \rightarrow (x - 5)^4 = 1 \rightarrow x - 5 = \pm 1 \rightarrow x \in \{4, 6\}$

Mulțimea soluțiilor ecuației este $\{4, 5, 6\}$.

Observație. Ecuația binomă $x^4 = a^4, a > 0$ are două rădăcini reale $x = \pm a$.

Aplicația 4. Fie legea de compoziție $x \circ y = 3xy - 6x - 6y + 14, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Verificați dacă $x \circ y = 3(x - 2)(y - 2) + 2, x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că legea este asociativă.

c) Aflați elementul neutru al legii date.

d) Calculați $2 \circ 3 \circ 4 \circ \dots \circ 12$.

e) Rezolvați inecuația $x \circ x \leq 5, x \in \mathbb{R}$.

f) Rezolvați ecuația $x \circ x \circ x = \frac{7}{3}, x \in \mathbb{R}$.

g) Rezolvați ecuația $x \circ x \circ x \circ x = x, x \in \mathbb{R}$.