Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Determinarea inversei unei funcţii

Fie $f: A \to B$ o funcție bijectivă. Inversa funcției f este funcția $f^{-1}: B \to A$, unde fiecărui element din B îi corespunde un unic element din A . $f(x) = y \in B \quad \leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y) \in A$

$f \circ f^{-1}: B \to B\,, (f \circ f^{-1})(x) = x = 1_B(x)$

$f^{-1} \circ f: A \to A\,, (f^{-1} \circ f)(x) = x = 1_A(x)$

Determinaţi inversele funcţiilor:

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f(x) = x + 1$

   Coeficientul lui x este $a = 1 > 0$, funcția de gradul întâi este strict crescătoare și este injectivă (1). Ecuația $f(x) = y \in \mathbb{R}$ are soluție, $x + 1 = y \in \mathbb{R} \ \leftrightarrow \ x = y - 1 \in \mathbb{R}$ și f este surjectivă (2). Din (1) și (2) funcția f este bijectivă, deci inversabilă. Inversa lui f este funcția $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f^{-1}(x) = x - 1$.

2. $f: [0, \infty) \to [1, \infty)\,, f(x) = x^2 + 1$

   Funcția f este bijectivă dacă pentru $\forall y \in [1, \infty)\ \exists!\, x \in [0, \infty)$ a. î. $f(x) = y$.

   $x^2 + 1 = y \in [1, \infty) \ \leftrightarrow \ x^2 = y - 1 \in [0, \infty) \ \leftrightarrow \ x = \sqrt{y - 1} \in [0, \infty)$

   $x = f^{-1}(y) \ \leftrightarrow \ f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1} \in [0, \infty) \ \leftrightarrow \ f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}\,, f^{-1}: [1, \infty) \to [0, \infty)$

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f(x) = \begin{cases} x + 1\,, x < 2 \\ 2x - 1\,, x \geq 2 \end{cases}$

   $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists!\, x \in \mathbb{R}$ a. î. $f(x) = y$

   I. $x + 1 = y\,, x < 2 \ \leftrightarrow \ x = y - 1 < 2 \ \leftrightarrow \ y < 3$

   II. $2x - 1 = y\,, x \geq 2 \ \leftrightarrow \ x = \dfrac{y + 1}{2} \geq 2 \ \leftrightarrow \ y \geq 3$

   $f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1\,, x < 3 \\ \dfrac{x + 1}{2}\,, x \geq 3 \end{cases}\,, f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

4. $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)\,, f(x) = e^x$

   $\forall y \in (0, \infty)\ \exists!\, x \in \mathbb{R}$ a. î. $f(x) = y$

   $e^x = y \in (0, \infty) \ \leftrightarrow \ x = ln\, y \in \mathbb{R}$

   $f^{-1}(x) = ln\, x\ , f^{-1}: (0, \infty) \to \mathbb{R}$

5. $f:\mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}, f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Varianta 1

$f'(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)' = -\dfrac{2}{(x-1)^2} < 0 \ \to\ f$ este strict descrescătoare $\ \to\ f$ este injectivă (1)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1, \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty, \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1, f$ continuă pe intervale $\to$

$f(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = \mathbb{R}\setminus\{1\} \ \to\ f$ este surjectivă (2), unde $\mathbb{R}\setminus\{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

Din (1) și (2) funcția f este bijectivă, deci inversabilă.

$$f(x) = y \ \leftrightarrow\ \frac{x+1}{x-1} = y \ \leftrightarrow\ x+1 = y(x-1) \ \leftrightarrow\ x = \frac{y+1}{y-1} \ \leftrightarrow\ x = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Varianta 2

$\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\ \exists!\, x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ a.î. $f(x) = y$

$$f(x) = y \ \leftrightarrow\ \frac{x+1}{x-1} = y \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \ \leftrightarrow\ \frac{x-1+2}{x-1} = y \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \ \leftrightarrow\ 1 + \frac{2}{x-1} = y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

$$\frac{2}{x-1} = y-1 \ \leftrightarrow\ \frac{1}{x-1} = \frac{y-1}{2} \ \leftrightarrow\ x-1 = \frac{2}{y-1} \ \leftrightarrow\ x = \frac{2}{y-1} + 1 \ \leftrightarrow\ x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \ \leftrightarrow\ x \neq 1 \ \leftrightarrow\ \frac{y+1}{y-1} \neq 1, y \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \ \leftrightarrow\ y+1 \neq y-1 \ \leftrightarrow\ 1 \neq -1\ (A)$$

$$x = f^{-1}(y) \ \leftrightarrow\ f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \ \leftrightarrow\ f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$$

6. $f:(0,\infty) \to (1,3), f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$

$\forall y \in (1,3)\ \exists!\, x \in (0,\infty)$ a.î. $f(x) = y$

$$f(x) = y \ \leftrightarrow\ \frac{x+3}{x+1} = y \in (1,3) \ \leftrightarrow\ 1 + \frac{2}{x+1} = y \in (1,3) \ \leftrightarrow\ \frac{2}{x+1} = y-1 \in (0,2) \ \leftrightarrow$$

$\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{y-1}{2} \in (0,1), \dfrac{y-1}{2}$ este funcție strict crescătoare $\ \leftrightarrow$

$x+1 = \dfrac{2}{y-1} \in (1,\infty), \dfrac{2}{y-1}$ este funcție strict descrescătoare $\ \leftrightarrow$

$x = \frac{2}{y-1} - 1 \in (0,\infty) \;\leftrightarrow\; x = \frac{3-y}{y-1} \in (0,\infty)$

$x = f^{-1}(y) \;\leftrightarrow\; f^{-1}(y) = \frac{3-y}{y-1} \in (0,\infty) \;\leftrightarrow\; f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-1}, f^{-1}: (1,3) \to (0,\infty)$

7. $f_A: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f_A(X) = AXA^{-1}, A, A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Funcția f_A este bijectivă prin construcție.

$f_A(X) = Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\leftrightarrow\; AXA^{-1} = Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\leftrightarrow\; A^{-1}(AXA^{-1})A = A^{-1}YA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\leftrightarrow$

$X = A^{-1}YA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\leftrightarrow\; X = {f_A}^{-1}(Y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

${f_A}^{-1}: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), {f_A}^{-1}(X) = A^{-1}XA$