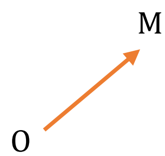
Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Vectorul de poziţie al unui punct

1. Vectorul de poziţie al punctului M

Considerăm punctul O fixat în plan, atunci vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numește vectorul de poziție al punctului M.

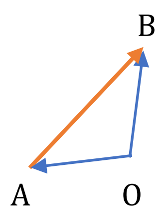


$$\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$$

2. Exprimarea vectorului $\overrightarrow{AB}$ cu ajutorul vectorilor de poziţie

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$



3. Vectorul de poziţie al punctului care împarte un segment într-un raport dat

Fie $M \in (AB)$, unde $\dfrac{AM}{MB} = k > 0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB} \quad \Longrightarrow$

$\vec{r}_M - \vec{r}_A = k \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_M) \quad \Longrightarrow \quad (1+k) \cdot \vec{r}_M = \vec{r}_A + k \cdot \vec{r}_B \quad \Longrightarrow$

$\vec{r}_M = \dfrac{1}{1+k} \cdot \vec{r}_A + \dfrac{k}{1+k} \cdot \vec{r}_B$

Observație. Pentru $k = 1$, M este mijlocul segmentului AB și $\vec{r}_M = \dfrac{1}{2} \cdot \vec{r}_A + \dfrac{1}{2} \cdot \vec{r}_B$.

4. Condiţia de coliniaritate a trei puncte

Punctele A, M și B sunt coliniare dacă $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \iff$

$\vec{r}_M = \dfrac{1}{1+k} \cdot \vec{r}_A + \dfrac{k}{1+k} \cdot \vec{r}_B$. Notăm $\dfrac{1}{1+k} = x$, $\dfrac{k}{1+k} = y$ și relația anterioară devine

$\vec{r}_M = x \cdot \vec{r}_A + y \cdot \vec{r}_B$, unde $x + y = 1$, $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Condiţia ca un patrulater convex să fie paralelogram

Un patrulater convex este paralelogram $\iff$ diagonalele se înjumătățesc.

$ABCD$ este paralelogram $\iff \vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$

6. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi

G este centrul de greutate al triunghiului $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Determinăm vectorul de poziție al punctului G:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{r}_A - \vec{r}_G + \vec{r}_B - \vec{r}_G + \vec{r}_C - \vec{r}_G = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)$$

7. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris în triunghi

Vectorul de poziție al punctului I de intersecție al bisectoarelor interioare ale unui triunghi ABC este $\vec{r}_I = \frac{a}{a+b+c} \cdot \vec{r}_A + \frac{b}{a+b+c} \cdot \vec{r}_B + \frac{c}{a+b+c} \cdot \vec{r}_C$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor BC, CA, AB.

8. Vectorul de poziție al centrului cercului circumscris unui triunghi

Pornim de la Relația lui Sylvester: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2 \cdot \overrightarrow{HO}$, unde O este centrul cercului circumscris, iar H este ortocentrul triunghiului ABC. Relația devine $\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C = 2 \cdot \vec{r}_O$.

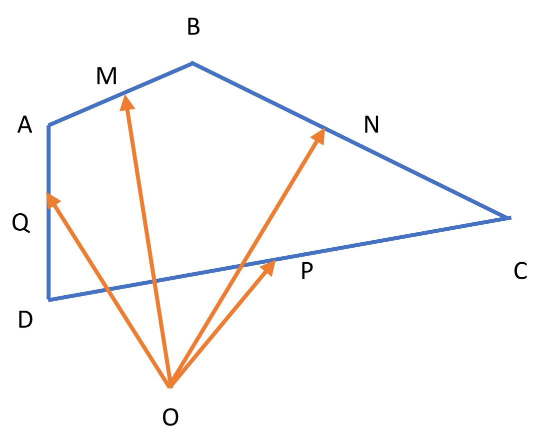
9. Vectorul de poziție al ortocentrului unui triunghi

Pornim de la Relația lui Sylvester: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, unde O este centrul cercului circumscris, iar H este ortocentrul triunghiului ABC. Relația devine $\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C = \vec{r}_H$.

10. Aplicație

Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor patrulaterului convex $ABCD$ și O un punct din plan.

Arătați că $\vec{r}_M + \vec{r}_P = \vec{r}_N + \vec{r}_Q$.



M este mijlocul segmentului AB și $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$

N este mijlocul segmentului BC și $\vec{r}_N = \frac{\vec{r}_B + \vec{r}_C}{2}$

P este mijlocul segmentului CD și $\vec{r}_P = \frac{\vec{r}_C + \vec{r}_D}{2}$

Q este mijlocul segmentului DA și $\vec{r}_Q = \frac{\vec{r}_D + \vec{r}_A}{2}$

Obținem că $\vec{r}_M + \vec{r}_P = \vec{r}_N + \vec{r}_Q$.

Sursa https://ro.wikipedia.org/wiki/Centrul_cercului_înscris_într-un_triunghi