Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Ordinul unui grup. Ordinul unui element

Considerăm grupul multiplicativ $(G,\cdot)$.

Ordinul unui grup $(G,\cdot)$ este dat de numărul de elemente și este notat cu $ord(G)$. Pentru grupurile finite $ord(G)$ este dat de cardinalul mulțimii G, notat $|G|$, iar pentru grupurile infinite, ordinul grupului este infinit.

Observații:

1) Singurul grup de ordinul 1 este grupul trivial/banal și este format din elementul neutru e.

2) Prin definiție, singurul element de ordinul 1 al unui grup este elementul neutru e.

3) Un element este de ordinul 2 dacă și numai dacă este egal cu inversul său și diferit de elementul neutru e. Grupul în care fiecare element este de ordinul doi, cu excepția elementului neutru, este grup comutativ.

$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$

Ordinul unui element a din grupul multiplicativ $(G,\cdot)$ este cel mai mic număr întreg pozitiv n pentru care $a^n = e$. Dacă nu există n se spune că grupul $(G,\cdot)$ are ordinul infinit.

Exemple:

1) Fie $(\mathbb{Z}_4, +), \mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ are patru elemente și $ord(\mathbb{Z}_4) = 4$.

$ord(\hat{0}) = 1$ deoarece elementul neutru a lui $\mathbb{Z}_4$ este $\hat{0}$
$ord(\hat{1}) = 4$ pentru că $\underbrace{\hat{1} + \hat{1} + \hat{1} + \hat{1}}_{de\ 4\ ori} = \hat{0}$
$ord(\hat{2}) = 2 \quad \leftrightarrow \quad \hat{2} + \hat{2} = \hat{0}$
$ord(\hat{3}) = 4 \quad \leftrightarrow \quad \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} + \hat{3} = \hat{0}$

2) Considerăm grupul multiplicativ al matricelor pătratice de ordinul doi $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\cdot)$.
Elementul neutru al grupului este $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alegem matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
$A^4 = I_2 \quad \rightarrow \quad ord(A) = 4$
$B^6 = I_2 \quad \rightarrow \quad ord(B) = 6$
însă $ord(AB) = \infty$, deci și $ord(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})) = \infty$.

Teorema lui Lagrange. Pentru orice subgrup $(H,\cdot)$ a lui $(G,\cdot)$, ordinul subgrupului divide ordinul grupului. $|H|$ este divizor a lui $|G|$.

Exemplu:

Fie $(\mathbb{Z}_4, +)$. Considerăm $(H, +), H = \{\hat{0}, \hat{2}\} \subset \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\} = \mathbb{Z}_4$. $ord(H) = 2$ divide $4 = ord(\mathbb{Z}_4)$.

Informații suplimentare găsiți la adresa https://ro.wikipedia.org/wiki/Ordin_(teoria_grupurilor)