Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,, f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1\,, x<0\\ \quad e^x \qquad\quad , x\geq 0\end{cases}, a\in\mathbb{R}$.

   a) Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

   b) Determinați a astfel încât funcția f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

   c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(1)+f(2)+\ ...+f(n)}{e^n}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}\,, I_n=\int\limits_0^1 x^n(1-x)^n dx$.

   a) Arătați că $I_1=\dfrac{1}{6}$.

   b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ este monoton.

   c) Arătați că $(4n+2)I_n=nI_{n-1}$.

Rezolvare

1\. a) $f(x)=x^2+ax+1\,, x<0$, funcție elementară $\to$ funcție continuă (1)

$f(x)=e^x\,, x\geq 0$, funcție elementară $\to$ funcție continuă (2)

$f_s(0)=1=f(0)=1=f_d(0)$ $\to$ funcție continuă în $x=0$ (3)

Din (1), (2), (3) funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

1\. b) $f(x)=x^2+ax+1\,, x<0$, funcție elementară $\to$ derivabilă $f'(x)=2x+a$ (1)

$f(x)=e^x\,, x\geq 0$, funcție elementară $\to$ funcție derivabilă $f'(x)=e^x$ (2)

$f_s{}'(0)=a=f_d{}'(0)=1$ $\to$ funcție derivabilă în $x=0$ (3)

Din (1), (2), (3) funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ dacă $a=1\in\mathbb{R}$.

1\. c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(1)+f(2)+\ ...+f(n)}{e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e+e^2+\ ...+e^n}{e^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e\cdot\dfrac{e^n-1}{e-1}}{e^n}=\dfrac{e}{e-1}$

2\. a) $I_1=\int\limits_0^1 x(1-x)dx=\int\limits_0^1(x-x^2)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

2\. b) $I_{n+1}-I_n=\int\limits_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n+1}dx-\int\limits_0^1 x^n(1-x)^n dx=$

$$= \int_0^1 \underbrace{x^n}_{(1)} \underbrace{(1-x)^n}_{(2)} \underbrace{(x-x^2-1)}_{(3)} dx \leq 0 \quad \rightarrow \text{ șirul } (I_n)_{n\geq 0} \text{ este monoton}$$

$x \in [0,1] \quad \leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 1$

$x \geq 0 \quad \rightarrow \quad x^n \geq 0 \ \ (1)$

$x \leq 1 \quad \rightarrow \quad 1-x \geq 0 \quad \rightarrow \quad (1-x)^n \geq 0 \ \ (2)$

$x - x^2 - 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad x^2 - x + 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = -3 < 0 \end{cases} \quad \rightarrow$

$x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ atunci $x - x^2 - 1 < 0, x \in \mathbb{R}$ (3)

2. c) $I_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n dx$

Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{2} - t$, derivăm $dx = -dt$ și obținem

$$I_n = \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right)^n \left(\frac{1}{2} + t\right)^n (-dt) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^n dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right)^n dx = I_n =$$

$$= x\left(\frac{1}{4} - x^2\right)^n \Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \cdot n \left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{n-1} (-2x) dx =$$

$$= -2n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{n-1} (-x^2) dx = -2n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{n-1} \left(\frac{1}{4} - x^2 - \frac{1}{4}\right) dx =$$

$$= -2n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right)^n dx + \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2\right)^{n-1} dx = -2nI_n + \frac{n}{2} I_{n-1}$$

$I_n = -2nI_n + \frac{n}{2} I_{n-1}$ de unde avem $(2n+1)I_n = \frac{n}{2} I_{n-1}$ și apoi $(4n+2)I_n = nI_{n-1}$.