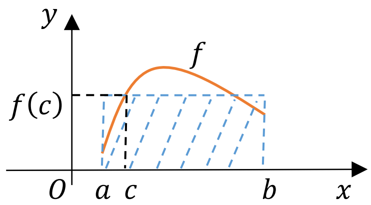
Profesor Blaga Mirela-Gabriela

TEOREMA DE MEDIE

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, atunci $\exists\ c\in[a,b]$ astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c)$.

Interpretare geometrică. $\exists$ cel puțin un $c\in[a,b]$ astfel încât aria dreptunghiului de bază $b-a$ și înălțime $f(c)$ să fie egală cu aria subgraficului funcției continue și pozitive f pe intervalul $[a,b]$.



Aplicația 1 Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, având proprietatea $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=\frac{\pi}{4}$.

Arătați că $\exists\ c\in[0,1]$ astfel încât $c^4 f(c)+c^2 f(c)=1$.

Deoarece $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=arctgx\Big|_0^1=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}$, proprietatea devine $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx\ \rightarrow\ \int_0^1\left(x^2f(x)-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=0$.

Atunci $\exists\ c\in[0,1]$ pentru care $(1-0)\cdot\left(c^2f(c)-\frac{1}{c^2+1}\right)=0$ și obținem $(c^2+1)c^2f(c)-1=0$, de unde avem $c^4f(c)+c^2f(c)=1$.

Aplicația 2 Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}\frac{ln\,(t+1)}{t}dt$.

Conform Teoremei de medie $\exists\ c_x\in[ax,bx]$, $c_x\xrightarrow[x>0]{x\to0}0$, a. î. pentru funcția continuă $f(x)=\frac{ln\,(x+1)}{x}$, $x>0$, să avem

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}\frac{ln\,(t+1)}{t}dt=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\cdot(bx-ax)\cdot\frac{\ln(c_x+1)}{c_x}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{(b-a)x}{x}\cdot1=$$
$$=b-a$$

Aplicația 3 Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, având proprietatea $4\cdot\int_0^1 f(x)\,dx=1$.

Arătați că ecuația $f(x)-x^3=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[0,1]$.