

**SUBIECTUL al II-lea**

1. Considerăm matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & ix \\ 0 & 1 & 0 \\ -ix & 0 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .
- a) Calculați  $\det(A(i))$ .
- b) Arătați că  $A(x) \cdot A(y) = A(2xy)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- c) Rezolvați ecuația  $A(3^a) \cdot A(3^{a+1}) \cdot A(3^{a+2}) = A(4)$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x \circ y = xy - x - y + 2$ .
- a) Arătați că legea dată este asociativă.
- b) Arătați că, pentru orice  $x, y \in (1, \infty)$  avem  $x \circ y \in (1, \infty)$ .
- c) Determinați  $a \in \mathbb{Z}$  pentru care  $x \circ a = a$ ,  $\forall x \in \mathbb{Z}$ .

*Rezolvare*

1. a)  $i^2 = -1$

$$\det(A(i)) = \begin{vmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

1. b)  $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & ix \\ 0 & 1 & 0 \\ -ix & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 & iy \\ 0 & 1 & 0 \\ -iy & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + 0 + (-i^2xy) & 0 & ixy + ixy \\ 0 & 1 & 0 \\ -ixy - ixy & 0 & xy + xy \end{pmatrix} =$   
 $= \begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xyi \\ 0 & 1 & 0 \\ -2xyi & 0 & 2xy \end{pmatrix} = A(2xy)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R} \rightarrow 2xy \in \mathbb{R}$

1. c)  $A(3^a) \cdot A(3^{a+1}) = A(2 \cdot 3^a \cdot 3^{a+1}) = A(2 \cdot 3^{2a+1})$  din 1. b).

$$A(2 \cdot 3^{2a+1}) \cdot A(3^{a+2}) = A(2 \cdot 2 \cdot 3^{2a+1} \cdot 3^{a+2}) = A(4 \cdot 3^{3a+3})$$

$$A(4 \cdot 3^{3a+3}) = A(4) \rightarrow 4 \cdot 3^{3a+3} = 4 \rightarrow 3^{3a+3} = 1 \rightarrow 3a + 3 = 0 \rightarrow a = -1 \in \mathbb{R}$$

2. a)  $x \circ y = xy - x - y + 2 = (x - 1)(y - 1) + 1$

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$(x \circ y - 1)(z - 1) + 1 = (x - 1)(y \circ z - 1) + 1$$

$$(x - 1)(y - 1)(z - 1) + 1 = (x - 1)(y - 1)(z - 1) + 1 \quad (A)$$

2. b)  $x \in (1, \infty) \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \quad (1)$

$$y \in (1, \infty) \Leftrightarrow y > 1 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \quad (2)$$

$$\text{Din (1) și (2) avem } (x - 1)(y - 1) > 0 \rightarrow (x - 1)(y - 1) + 1 > 1 \rightarrow x \circ y \in (1, \infty)$$

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

2. c)  $x \circ a = a, \forall x \in \mathbb{Z}$

$$(x - 1)(a - 1) + 1 = a \rightarrow (x - 1)(a - 1) + 1 - a = 0 \rightarrow (a - 1)(x - 1 - 1) = 0 \rightarrow$$

$$(a - 1)(x - 2) = 0 \rightarrow a = 1 \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$$