Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}\,, f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-x$.

   a)Aflați ecuația asimptotei la graficul funcției spre $+\infty$.

   b)Arătați că funcția f este strict descrescătoare.

   c)Demonstrați că, oricare ar fi $a\in(1{,}2)$ ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

2. Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,, f(x)=-x+2\,, g(x)=x^2$.

   a)Calculați $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$.

   b)Arătați că $\int_{-2}^{1} f(x)dx \geq \int_{-2}^{1} g(x)dx$.

   c)Calculați aria suprafeței delimitate de funcțiile f și g.

Rezolvare

1\. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+4-x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x+x}=1$

$y=1$ este ecuația asimptotei la graficul funcției spre $+\infty$.

1\. b) $f'(x)=\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+4}}-1=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}-1<0\,, x\in(0,\infty)$. Verificare.

$\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}-1<0\ \to\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}<1\ \to\ x+1<\sqrt{x^2+2x+4}\,, x\in(0,\infty)$

$\to\ x^2+2x+1<x^2+2x+4\ \to 0<3\ (A)$

$\to\ f$ este strict descrescătoare, $x\in(0,\infty)$

1\. c) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)=2$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ din 1. a)

f este strict descrescătoare, $x\in(0,\infty)$ din 1. b)

Atunci $\forall a\in(1{,}2)$ ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

2. a) $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx = \int_0^1 (-x+2)x^2dx = \int_0^1 (-x^3+2x^2)dx = \left(-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$

$= -\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$

2. b) $x \in [-2,1] \ \leftrightarrow \ -2 \le x \le 1$

$x \ge -2 \ \rightarrow \ x+2 \ge 0$

$x \le 1 \ \rightarrow \ 1-x \ge 0$

$(x+2)(1-x) \ge 0$ atunci $-x+2-x^2 \ge 0 \ \leftrightarrow \ -x+2 \ge x^2 \ \leftrightarrow$

$f(x) \ge g(x), x \in [-2,1] \ \leftrightarrow \ \int_{-2}^1 f(x)dx \ge \int_{-2}^1 g(x)dx$

2. c) Din 2. b) avem $f(x) \ge g(x), x \in [-2,1]$, adică $f(x)-g(x) \ge 0$, $x \in [-2,1]$.

Aria suprafeței delimitate de funcțiile f și g este

$A = \int_{-2}^1 (f(x)-g(x))dx = \int_{-2}^1 (-x+2-x^2)dx = \left(-\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}$