Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-2\cdot arctgx$.

   a)Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f paralelă cu axa Ox.

   b)Aflați ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $+\infty$.

   c)Arătați că $f\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)$.

2. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x}}$.

   a)Calculați $\displaystyle\int_1^2 f(x)\cdot\sqrt{x}dx$.

   b)Determinați volumul corpului determinat de graficul funcției $g:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+2)\cdot f(x)$.

   c)Fie $I_n=\displaystyle\int_1^2 x^n\cdot f(x)dx$. Arătați că $I_{n+1}+2I_n=\dfrac{2^{n+1}\sqrt{2}-2}{2n+1}$.

Rezolvare

1. a) $f'(x)=(x-2\cdot arctgx)'=1-\dfrac{2}{x^2+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, x\in[0,\infty)$

$G_f \parallel Ox \;\to\; f'(x)=0 \;\to\; x=1\in[0,\infty)$

Ecuația tangentei la graficul funcției f paralelă cu axa Ox este $y=f(1)$.

$y=1-\dfrac{\pi}{2}$

1. b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \;\to\; \nexists$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

$y=mx+n, m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1\neq 0$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}(-2arctgx)=-\pi$

$y=x-\pi$ este ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

1. c) $2<3 \;\to\; \sqrt{2}<\sqrt{3} \;\to\; \dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}} \;\to\; 0<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1 \;\to\; 0<3^{-\frac{1}{2}}<2^{-\frac{1}{2}}<1$

$f'(x)<0$ pentru $x\in(0,1)$, deducem că funcția f este strict descrescătoare și

$$f\left(3^{-\frac{1}{2}}\right) > f\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)$$

2. a) $\int_1^2 f(x) \cdot \sqrt{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x+2}\, dx = ln(x+2)\Big|_1^2 = ln\frac{4}{3}$

2. b) $g(x) = (x+2) \cdot\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0\ , x \in\ [1, e]$

$$V = \pi \int_1^e (g(x))^2 dx = \pi \int_1^e \frac{1}{x} dx = \pi\, ln\, x\Big|_1^e = \pi$$

2. c) $I_{n+1} + 2I_n = \int_1^2 (x^{n+1} \cdot f(x) + 2 \cdot x^n \cdot f(x))dx = \int_1^2 x^n (x+2) \frac{1}{(x+2)\sqrt{x}} dx =$

$$= \int_1^2 x^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 x^{n-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}}\ \Big|_1^2 = \frac{2^{n+1}\sqrt{2} - 2}{2n+1}$$